SECCION ESTRUCTURAS
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS EN INGENIERIA CIVIL

CURSO DE EXTENSION
3 al 7 DE DICIEMBRE
1973

PARTE 2: MANUALES DE USO DE PROGRAMAS

TOMAS GUENDELMAN B
MAURICIO KATANELLA S.
RODOLFO SARAGONI H.
MAURICIO SARRAZIN A.
PATRICIA VIVERO B.

PROYECTO SES/EX - 3/73

SANTIAGO - CHILE

t

SECCION ESTRUCTURAS
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS EN INGENIERIA CIVIL

CURSO DE EXTENSION
3 a 7 DE DICIEMBRE
1973

PARTE 2: MANUALES DE USO DE PROGRAMAS

TOMAS GUENDELMAN B.
MAURICIO KATANELLA S.
RODOLFO SARAGONI H.
MAURICIO SARRAZIN A.
PATRICIA VIVERO B.

PROYECTO SES/EX - 3/73

SANTIAGO - CHILE

t

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

EN

INGENIERIA CIVIL

Curso de Extensión: 3 al 7 de Diciembre, 1973

Sección Estructuras

Departamento de Obras Civiles

Universidad de Chile

Tomás Guendelman
Mauricio Katanella
Rodolfo Saragoni
Mauricio Sarrazin
Patricia Vivero

Manual M1.- SMOE: Sistema Matricial Orientado a Estructuras

Programador Original: E.L. Wilson

Adaptación y extensión: Sección Estructuras Departamento de Obras Civiles

1. INTRODUCCION

El presente manual describe el uso del programa SMOE (Sistema Matricial Orientado a Estructuras), según una versión original del programa SMIS, programado por el profesor E. L. Wilson de la Universidad de California, Berkeley y adaptado al computador IBM 360 de la Universidad de Chile por el Ing. Sr. Santiago Vásquez.

El programa SMOE consiste en la agrupación de rutinas de análisis matricial las que son invocadas por comandos operativos.

Esta definición encierra una diferencia importante con respecto a los programas específicos y a los sistemas.

Los programas específicos, (por ejemplo un programa para el análisis de marcos planos) poseen normalmente una alta eficiencia de operación y de entrada de dato. Sin embargo, están limitados a un cierto tipo de problemas. Los sistemas, por su parte, eliminan la limitación del tipo de problemas que se pueden resolver, pero con fuerte desmedro de la eficiencia de operación.

El programa SMOE corresponde a una situación intermedia entre programas específicos y sistemas. Reúne las características de los sistemas en cuanto a su flexibilidad para analizar variados tipos de problemas, con la eficiencia de los programas específicos, dado que las rutinas implementadas en él están orientadas al análisis de estructuras.

El programa SMOE se puede utilizar también en álgebra matricial derivada de problemas físicos diversos, sin embargo en dicho caso podrá producirse una pérdida de eficiencia.

En este informe se incluye:

- Cuadro de los comandos existentes y su significado.
- Descripción de la entrada de datos. Sus características y restricciones.
- Manual de uso. Errores contemplados.
- Ejemplo de entrada de datos para un marco plano.
- Ejemplo de entrada datos para un problema de elasticidad plana usando elementos finitos triangulares.

2. COMANDOS EXISTENTES.-

Número	Comando	Significado
1	CARG	Una matriz se lee
2	IMPR	Una matriz se imprime
3	CERO	Una matriz se hace cero
4	BORR	Una matriz se elimina
5	DUPL	Se define una segunda matriz duplicada de una ya ya existente
6	SUMA	Dos matrices se suman
7	REST	Dos matrices se restan
8	ESCA	Se multiplica una matriz por un factor escalar
9	MULT	Dos matrices se multiplican
10	INVE	Una matriz no simétrica se invierte
11	INSI	Una matriz simétrica se invierte
12	TRAN	Una matriz se transpone
13	CSME	Una submatriz se carga en una matriz más grande
14	MSMD	Una submatriz se mueve de una matriz más grande
15	GRAB	Una matriz se graba en un archivo magnético (disco o cinta) secuencial
16	LEER	Una matriz se lee de un archivo magnético como el definido más arriba

17	EMPE	Comienza un conjunto de comandos sin relación con los anteriores (Primer comando que debe ir siempre encabezando la resolución de un problema)
18	REWI	El archivo magnético se posiciona al comienzo. (Después de un comando GRAB y antes de un LEER debe ir un REWI)
19	VVPR	Se obtienen los valores y vectores propios de sistema $[A]\ \{x\} = \lambda\ [B]\ \{x\}$, donde $[A]$ es una matriz simétrica y $[B]$ es diagonal.
20	RESP	Se evalúa el conjunto de ecuaciones diferenciales siguiente: $\{\ddot{x}\}_t + 2\lambda\ [\omega]\ \{\dot{x}\}_t + [\omega^2]\ \{x\}_t = \{S\}\ \{P\}_t$ (usando método de integración lineal)
21	FUNC	Una función f(x) definida para valores cualesquiera de x, es redefinida para intervalos iguales de x.
22	RAIZ	Se extrae la raíz cuadrada de cada elemento de una matriz.
23	RECI	Se calcula el recíproco de cada elemento de una matriz.
24	TIEM	Da el tiempo en segundos desde que se inicializó la ejecución del programa.
25	MAXI	Dada la siguiente tabla de valores función de una variable independiente x :

$$\begin{array}{l} A_1\ (x_1),\ A_1\ (x_2),\ \text{---------}\ A_1\ (x_n) \\ A_2\ (x_1),\ A_2\ (x_2),\ \text{---------}\ A_2\ (x_n) \\ \vdots \\ A_p\ (x_1),\ A_p\ (x_2),\ \text{---------}\ A_p\ (x_n) \end{array}$$

Este comando origina una nueva tabla:

$$\begin{array}{l} Y_1\ ,\ A_1\ (Y_1) \\ Y_2\ ,\ A_2\ (Y_2) \\ \vdots \\ Y_p\ ,\ A_p\ (Y_p) \end{array}$$

en que Y_i es el valor de la variable independiente para el cual $A_i\ (Y_i)$ es la mayor componente de su fila.

26	SUSM	Una submatriz se suma a una parte de una matriz más grande.
27	COME	Permite escribir títulos o comentarios.
28	FORM	Se forma una matriz de rigidez de 2 x 2 para un elemento estructural.
29	FIN	Termina la ejecución del programa.
30	COMP	Compara en valor absoluto dos matrices, elemento a elemento.
31	MUVE	Multiplica dos matrices, elemento a elemento.
32	MREL	Se forma la matriz de rigidez de un elemento finito triangular plano.
33	CARK	Se ubica la matriz de rigidez de un elemento finito triangular plano en la matriz de rigidez de toda la estructura.
34	TENS	Se calcula las tensiones en un elemento finito triangular plano.
35	RIBA	Se forma la matriz de rigidez de un elemento uniaxial prismático plano, en coordenadas globales, considerando tres grados de libertad por nudo.
36	UBIK	Se ubica la matriz de rigidez de un elemento uniaxial prismático plano en la matriz de rigidez de toda la estructura.
37	ESFU	Se calcula los esfuerzos en elemento uniaxial prismático plano.
38	COND	Se reordenan o eliminan ciertas filas o columnas de una matriz.

3. ENTRADA DE DATOS.

La entrada de datos se divide en cuatro partes:

a) Comandos: Tienen formato fijo y ocupan una sola tarjeta por cada uno.

b) Datos reales: Tienen formato libre, que pueden ocupar una o más tarjetas, los cuales son leídos sólo por los comandos CARG, FORM, MREL ó RIBA.

c) Datos enteros: Tienen formato fijo, los cuales son leídos después del comando COND en 16I5, y pueden ocupar una o más tarjetas.

d) Títulos y comentarios: Información alfanumérica en formato libre.

a) Comandos.-

El formato fijo del comando tiene como máximo once campos, que son:

- un campo para el comando
- cuatro campos para nombre de matrices
- cuatro campos para valores enteros
- dos campos para valores reales (FORMATØ 2E6.0)

En una tarjeta estos campos son:

Columnas	Contenido	Tipo de Variable
1 - 4	Comando	Alfabético
9 - 16	Nombre Matriz A	Alfanumérico
17 - 24	Nombre Matriz B	Alfanumérico
25 - 32	Nombre Matriz C	Alfanumérico
33 - 40	Nombre Matriz D	Alfanumérico
41 - 46	Valor N1	Número entero
47 - 52	Valor N2	Número entero
53 - 58	Valor N3	Número entero
59 - 64	Valor N4	Número entero
65 - 70	Valor E1	Número real
71 - 76	Valor E2	Número real

Los nombres de matrices deben ir en la misma posición del campo, siempre que se trate de hacer referencia a la misma matriz. Por ejemplo: Si una matriz llamada RIGIDE se escribe desde la primera columna del campo, cada vez que se haga referencia a ella deberá ser escrita desde la primera posición del campo, o sea desde la posición de la extrema izquierda. En otras palabras, el reconocimiento de los nombres se hace columna por columna a través de las ocho del campo.

Los valores numéricos enteros deben estar justificados a la izquierda, es decir, las columnas que queden en blanco a la derecha del valor escrito en ese campo

se tomarán como ceros. Por ejemplo, si en las columnas 44 y 45 se escribe el número entero 12, esto significa que N1 vale 120, ya que la columna en blanco 46 se toma como cero.

Los valores numéricos reales pueden ir en cualquier posición del campo con su punto decimal donde corresponda. Alternativamente se pueden escribir con exponente decimal (Formato E).

b) Datos reales en formato libre.

Estos datos se leen con una rutina especial que permite que el formato sea totalmente libre. Deben cumplirse ciertas reglas que son:

- Puede ocuparse desde la columna 1 a la 80.
- Todos los datos deben ser reales, o sea, con punto decimal.
- Para separar un dato de otro, es necesario dejar por lo menos un blanco entre ellos.
- Si se quiere continuar en otra tarjeta, es necesario poner una X separada por un blanco del último dato.
- No se puede escribir una parte de un dato en una tarjeta y otra parte en la continuación.
- Existe el factor de repetición, es decir, si hay N datos contínuos que son iguales, se puede repetir ese dato las N veces separadas por un blanco, o se puede utilizar el signo "por" (*), como "N * dato". N debe ser entero, es decir, sin punto decimal. Ejemplo: hay que llenar con unos, una matriz de 3 x 3. Los datos que deben leerse son 9 unos, y basta con poner 9 * 1.0

  Estos datos que se leen con la rutina especial de formato libre real, van siempre después de los comandos CARG, FORM, MREL y RIBA.

c) Datos enteros en formato fijo.-

Esta forma de lectura de datos, es solamente utilizada por el comando COND en 16I5. Por las características del formato, los datos deben ser enteros y perforados a la derecha del campo.

d) Títulos y comentarios.-

Las tarjetas de comentarios y títulos pueden llevar cualquier carácter válido en ellas, entre las columnas 2 y 76. La columna 1 sirve para control de carro de la impresora.

4.- MANUAL DE USO

a) Indicaciones Generales:

El programa SMOE se encuentra compilado y grabado en la cinta número A11 del archivo del CEC. Dicha cinta está inicializada con standard label y con el nombre "ELEFIN". Para usar este programa son necesarias las siguientes tarjetas de control:

Columna 1

```
//INSTITUCION JØB 'PROYECTO,PROGRAMADOR',
// EXEC FØRTGLG,PARM.LKED=(MAP,ØVLY,LIST)
//LKED.SYSIN DD UNIT=2400,VØL=SER=ELEFIN,DSN=DECK,
// DISP=ØLD,LABEL=5
//GØ.SYSIN DD *
        -
        -   } COMANDØS Y DATØS
        -
        -
/*
//
```

Nota: Si el proceso que se realiza hace uso de unidades magnéticas de archivo temporal (cintas o discos), se debe agregar al conjunto anterior de tarjetas de control las asignaciones correspondientes en la posición indicada por una flecha.
Para tales fines, el usuario podrá consultar a la coordinación de computación de la Sección Estructuras respecto a las instrucción de control que correspondan.

b) Uso de los Comandos.-

1) CARG A = Nombre de la matriz que va a ser cargada en memoria.

N1 = Número de filas de la matriz.

N2 = Número de columnas de la matriz.

Inmediatamente después de esta tarjeta de comando deben ir las tarjetas con los N1 x N2 términos de la matriz A, ordenados por filas, en formato libre.

2) IMPR A = Nombre de la matriz que se imprime.

N1 = Número de tarjetas de comentario que deberá imprimirse antes de la matriz.

N2 = Cifras decimales deseadas.

Si N2 es cero o bien mayor que ocho, se imprime A en formato E14.7

En la columna 17 debe colocarse el caracter de control de carro, (los utilizados por FORTRAN IV), el cual se ejecuta antes y después de imprimir la matriz.

Inmediatamente después de esta tarjeta de comando deben ir las N1 tarjetas de comentario.

3) CERO A = Nombre de la matriz nula.

N1 = Número de filas de la matriz.

N2 = Número de columnas de la matriz.

4) BORR A = Nombre de la matriz que se elimina de la memoria.

5) DUPL A = Nombre de la matriz que se duplica.

B = Nombre de la nueva matriz duplicada.

6) SUMA A = Nombre de la matriz que, además de ser el primer sumando, se reemplaza por el resultado de la suma.

B = Nombre del segundo sumando.

7) REST A = Nombre de la matriz que, además de ser el primer substraendo, se reemplaza por la diferencia.

B = Nombre de la matriz que se resta a la matriz A.

8) ESCA A = Nombre de la matriz en la cual se multiplica cada elemento por una constante.

E1 = Constante que multiplica cada elemento de la matriz A.

9) MULT A = Nombre de la matriz definida como premultiplicador.

B = Nombre de la matriz definida como postmultiplicador.

C = Nombre de la matriz que contiene el producto AB.

10) INVE A = Nombre de la matriz que se reemplaza por su inversa.

11) INSI A = Nombre de la matriz simétrica que se reemplaza por su inversa.

12) TRAN A = Nombre de la matriz que se transpone.

B = Nombre de la matriz transpuesta de A.

13) CSME A = Nombre de la matriz mayor.

B = Nombre de la submatriz que será cargada en A.

N1 = Número de la fila de la matriz mayor donde comenzará a cargarse la submatriz B (1er elemento)

N2 = Número de la columna de la matriz mayor donde comenzará a cargarse la submatriz B (1er elemento)

14) MSMD A = Nombre de la matriz mayor.

B = Nombre de la submatriz que será removida de A.

N1 = Número de la fila de la matriz mayor, en la cual está el primer elemento de la submatriz B.

N2 = Número de la columna de la matriz mayor, en la cual está el primer elemento de la submatriz B.

N3 = Número de filas de la submatriz B.

N4 = Número de columnas de la submatriz B.

15) GRAB A = Nombre de la matriz que se graba en la unidad lógica N1 (archivo magnético)

N1 = Número de la unidad lógica, sea disco o cinta, en la cual se graba la matriz A.

16) LEER A = Nombre de la matriz que se lee desde el archivo magnético N1.

N1 = Número de la unidad lógica, (disco o cinta), desde la cual se lee la matriz A.

17) EMPE Este comando inicializa el programa desde el comienzo, eliminando todas las matrices que exista en memoria. Siempre debe ser el primer comando, cuando se procese más de un trabajo. El comando EMPE, por lo tanto, sirve para separar distintos trabajos que no tienen relación entre sí. Si uno de los trabajos tiene algún error tolerado por el programa, ese trabajo se termina y se busca el próximo comando EMPE.

18) REWI N1 = Número de la unidad lógica del archivo magnético, en el cual se hará una instrucción REWIND de FORTRAN. Vale decir, para cinta magnética, ésta será rebobinada hasta el comienzo del archivo N1, y para discos magnéticos el brazo tomará la posición inicial del archivo N1.

19) VVPR (Valores y vectores propios del sistema:

$[A] \{x\} = \lambda [B] \{x\}$)

A = Nombre de la matriz $[A]$. Esta matriz debe ser simétrica.

B = Nombre de la matriz $[B]$. Esta matriz debe ser diagonal, cargada como vector de 1 fila.

C = Nombre de la matriz en la cual quedarán los valores propios λ cargados por fila y en orden ascendente, o sea, de menor a mayor.

D = Nombre de la matriz de 1 fila que contendrá los valores propios λ.

Las matrices A y B son destruídas en el proceso. Se calculan todos los valores y vectores propios.

20) RESP Evaluación del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\underset{n \times 1}{\{\ddot{x}(t)\}} + 2 \underset{n \times n}{\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda\omega & \\ & & \ddots \end{bmatrix}} \underset{n \times 1}{\{\dot{x}(t)\}} + \underset{n \times n}{\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}} \underset{n \times 1}{\{x(t)\}} = \underset{n \times p}{[S]} \underset{p \times 1}{\{P(t)\}}$$

El programa solamente admite las siguientes posibilidades:

a) λ = constante

b) p = 1 ó p = n, en cuyo caso $[S]$ debe ser diagonal.

La función forzante $\{P(t)\}$ se proporciona por medio de NT vectores, cada uno de los cuales representa el vector $\{P(t)\}$ evaluado en:

$t = 0$, $t = \Delta t$, $t = 2\Delta t$, hasta $t = (NT-1)\ \Delta t$.

Este comando permite la determinación del vector $\{x(t)\}$ en m instantes igualmente espaciados, en que $1 \leq m \leq NT$.

El procedimiento de cálculo corresponde al método de aceleración lineal con un intervalo de integración igual a Δt.

Procedimiento:

a) Formar una matriz de fila $\langle\omega\rangle$ que contenga los n valores ω.

b) Formar una matriz de fila $\langle s\rangle$ que contenga la matriz $[S]$ para $p = 1$ ó la diagonal de la matriz $[S]$ para $p = n$

c) Formar una matriz $[f]$ de p filas y NT columnas en que se almacena el vector $\{P(t)\}$ para $t = 0$; $t = \Delta t$, ----, $t = (NT-1)\ \Delta t$.

Uso del comando:

A = Nombre asignado a $\langle\omega\rangle$

B = Nombre asignado a $\langle s\rangle$

C = Nombre asignado a $[f]$

D = Nombre que se asigna a una matriz de n filas y m columnas que corresponderá al vector $\{x(t)\}$ en m instantes igualmente espaciados.

N1 = $(NT-1)/m$

Este número deberá aproximarse a la cifra entera inferior (Ej: $NT = 27$; $m = 5$, $N1 = 5$).

E1 = λ

E2 = Δt

21) FUNC A = Nombre de una matriz de n filas y 2 columnas, cuya primera columna contiene una serie de valores x_1, x_2, ---- x_n y cuya segunda columna contiene otra serie de valores y_1, y_2, -----y_n.

B = Nombre de un vector que se compone de las ordenadas y, a intervalos Δx iguales, generadas por interpolación lineal de los valores de la matriz definida en A.

N1 = Número de ordenadas Y que se generan

E1 = Intervalo Δx de generación.

22) RAIZ A = Nombre de la matriz en que cada elemento se reemplaza por su raíz cuadrada.

23) RECI A = Nombre de la matriz en que cada elemento se reemplaza por su recíproco.

24) TIEM Este comando da el tiempo en segundos desde el comienzo del programa.

25) MAXI A = Nombre de la matriz para la cual se imprimen los máximos valores absolutos de sus filas.

N1 = Número de tarjetas de comentario que se imprimen antes de los valores máximos.

E1 = Constante que multiplica el número de orden de la columna en la cual se obtiene el valor máximo de la fila respectiva.

En la columna 17 va el caracter de control de carro, mencionado anteanteriormente. A continuación de este comando deben ir N1 tarjetas de comentario.

26) SUSM A = Nombre de la matriz mayor.

B = Nombre de la submatriz cuyos términos se suman a ciertos términos de A.

N1 = Número de la fila de la matriz mayor donde se suma el primer elemento de la submatriz.

N2 = Número de la columna de la matriz mayor donde se suma el primer elemento de la submatriz.

27) COME N1 = Número de tarjetas de comentario o título que irán inmediatamente después de este comando.
La primera columna de cada tarjeta de comentario sirve de control de carro.

28) FORM A = Nombre de la matriz de 2 x 2, que corresponde a la matriz de rigidez elemental de una barra a partir de sus propiedades.

$$A_{11} = A_{22} = \frac{2EI}{L} \left(\frac{2+\beta}{1+2\beta}\right)$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-\beta}{1+2\beta}\right)$$

$$\text{donde } \beta = \frac{6EI}{L^2 \bar{A} G}$$

en que $G = E/2.4$ y

$\bar{A}$ es el área efectiva de corte $= \dfrac{A \text{ neta}}{\kappa}$

Si no se quiere incluir deformaciones de corte, se coloca $\bar{A} = 0.0$

Inmediatamente después de este comando, debe ir una tarjeta que contenga los cuatro valores necesarios: I, A, L y E, en formato libre.

29) FIN Este comando se coloca una sola vez en una ejecución y sirve para terminar el proceso. Debe ser el último comando. Es semejante al STOP de FORTRAN IV.

30) COMP A = Nombre de una matriz (n x m).

B = Nombre de una matriz (n x m), en la cual quedará el resultado de comparar en valor absoluto cada elemento A_{ij} con su correspondiente B_{ij}.

N1 = Valor que indica si en B quedarán los menores o los mayores valores que resultan de la comparación. Si N1 = 0 en B quedaran los mayores. Si N1 toma cualquier otro valor, en B quedarán los menores.

31) MUVE A = Nombre de una matriz (n x m).

B = Nombre de una matriz (n x m).

C = Nombre de la matriz (n x m) que es el resultado de multiplicar cada elemento de A por cada elemento correspondiente de B, de tal modo que $C_{ij} = A_{ij} B_{ij}$.

32) MREL A = Matriz de (1 x 7) en la cual quedarán cargadas las propiedades de un elemento finito triangular de elasticidad plana. Estas deberán ser leídas de una tarjeta a continuación de este comando, en formato libre y en el siguiente orden:

A_2, B_2, A_3, B_3, t, E, ν

en que:

t espesor del elemento
E módulo de elasticidad lineal
ν razón de Poisson

y los otros términos se definen en la figura 1.

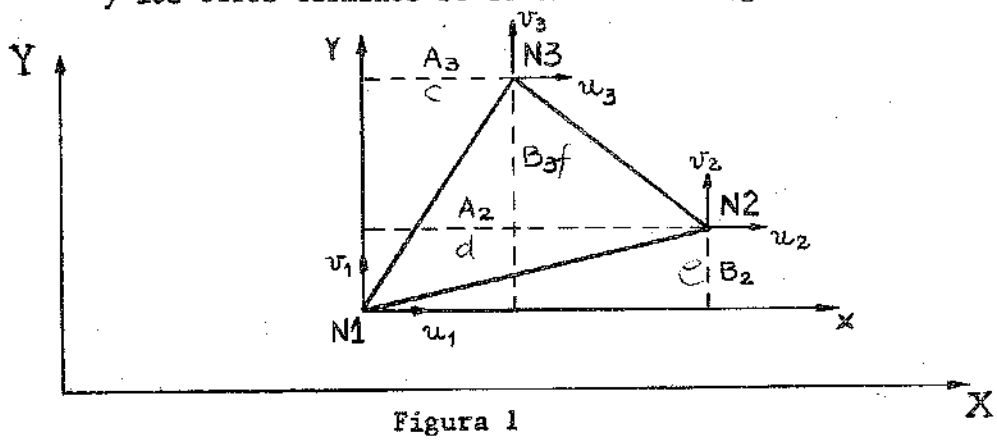


Figura 1

B = Matriz de (6 × 6) previamente definida, donde quedará cargada la matriz de rigidez del elemento en el sistema de coordenadas (X, Y).

N1 = Número arbitrario asociado con el elemento, como guía del usuario.

Para mayor documentación del usuario, la matriz de rigidez [B] está dada por :

$$
[B] = C \begin{bmatrix}
(B_2-B_3)^2 + \nu_1(A_3-A_2)^2 & \nu_2(B_2-B_3)(A_3-A_2) & B_3(B_2-B_3) - \nu_1 A_3(A_3-A_2) & \nu_2 A_3 B_3 - \nu A_3 B_2 - \nu_1 A_2 B_3 & B_2(B_3-B_2) + \nu_1 A_2(A_3-A_2) & \nu_2 A_2 B_2 - \nu A_2 B_3 - \nu_1 B_2 A_3 \\
 & (A_3-A_2)^2 + \nu_1(B_2-B_3)^2 & -\nu B_3 A_2 - \nu_1 A_3 B_2 + \nu_2 A_3 B_3 & -A_3(A_3-A_2) + \nu_1 B_3(B_2-B_3) & \nu_2 A_2 B_2 - \nu B_2 A_3 - \nu_1 A_2 B_3 & A_2(A_3-A_2) - \nu_1 B_2(B_2-B_3) \\
 & & B_3^2 + \nu_1 A_3^2 & -\nu_2 A_3 B_3 & -B_2 B_3 - \nu_1 A_2 A_3 & \nu A_2 B_3 - \nu_1 A_3 B_2 \\
 & \text{S I M E T R I C A} & & A_3^2 + \nu_1 B_3^2 & \nu A_3 B_2 - \nu_1 A_2 B_3 & -A_2 A_3 - \nu_1 B_2 B_3 \\
 & & & & B_2^2 + \nu_1 A_2^2 & -\nu_2 A_2 B_2 \\
 & & & & & A_2^2 + \nu_1 B_2^2
\end{bmatrix}
$$

en que :

$$A = \frac{1}{2}(A_2B_3 - A_3B_2) \qquad \nu_1 = \frac{1-\nu}{2}$$

$$C = \frac{E\,t}{4A(1-\nu^2)} \qquad \nu_2 = \frac{1+\nu}{2}$$

Esta matriz corresponde al problema de tensiones planas. Si se desea resolver un

problema de deformaciones planas, bastará con definir nuevos valores E' y ν' para E y ν respectivamente, dados por :

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

33) CARK A = Matriz de rigidez de un elemento finito triangular de elasticidad plana, previamente calculada, que se sumará a la matriz de rigidez de toda la estructura.

B = Matriz de rigidez de toda la estructura en coordenadas globales, previamente definida.

N1 = Número arbitrario asociado con el elemento, como guía del usuario.

N2, N3, N4 = Incidencias del elemento según se indica en la figura 1

33) TENS A = Matriz que contiene las propiedades del elemento finito triangular de elasticidad plana, definida en el comando MREL.

B = Vector de desplazamientos nodales externos de toda la estructura, previamente calculado.

C = Matriz de (1x3), previamente definida, en la cual quedarán cargadas las tensiones en el centroide del elemento, en el siguiente orden: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

N1 = Número arbitrario asociado con el elemento como guía del usuario.

N2, N3, N4 = Incidencias del elemento, según se indica en la figura 1.

La matriz [C] esta dada por:

$$[C] = \alpha \begin{bmatrix} (B_2-B_3) & B_3 & -B_2 & \nu(A_3-A_2) & -\nu A_3 & \nu A_2 \\ \nu(B_2-B_3) & \nu B_3 & -\nu B_2 & A_3-A_2 & -A_3 & A_2 \\ \beta(A_3-A_2) & -\beta A_3 & \beta A_2 & \beta(B_2-B_3) & \beta B_3 & -\beta B_2 \end{bmatrix}$$

en que: $A = \frac{1}{2}(A_2B_3 - A_3B_2)$

$$\alpha = \frac{E}{2A(1 - \nu^2)}$$

$$\beta = \frac{1 - \nu}{2}$$

conforme a las especificaciones de la Figura 1.

35) RIBA A = Matriz de (1x9) en la cual quedarán cargadas las propiedades de una barra prismática de una estructura reticular plana.
Estas propiedades deberán ser leídas en una tarjeta a continuación de este comando en formato libre y en el siguiente orden:

X longitud en proyección horizontal del elemento
Y longitud en proyección vertical del elemento
E módulo de elasticidad (Young)
G módulo de elasticidad tangencial (de corte)
RI momento de inercia de la sección
A área normal del elemento
κ factor de forma de la sección para deformaciones de corte
D1 ver figura 2
D2 ver figura 2
Las unidades son arbitrarias y deben ser consistentes.
Esta matriz se almacena en memoria, ya que será requerida por el comando ESFU para el cálculo posterior de los esfuerzos internos del elemento.

B = Matriz de (6,6), previamente definida, en la cual quedará cargada la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales.

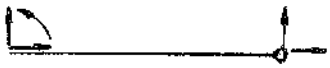
N1 = Número arbitrario asociado con el elemento, como guía del usuario.

N2 = Código :

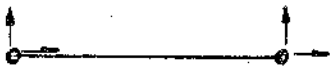
0-elemento con nudos rígidos.

1-elemento rotulado en el nudo inicial

2 - elemento rotulado en el nudo final



3-elemento bi-rotulado



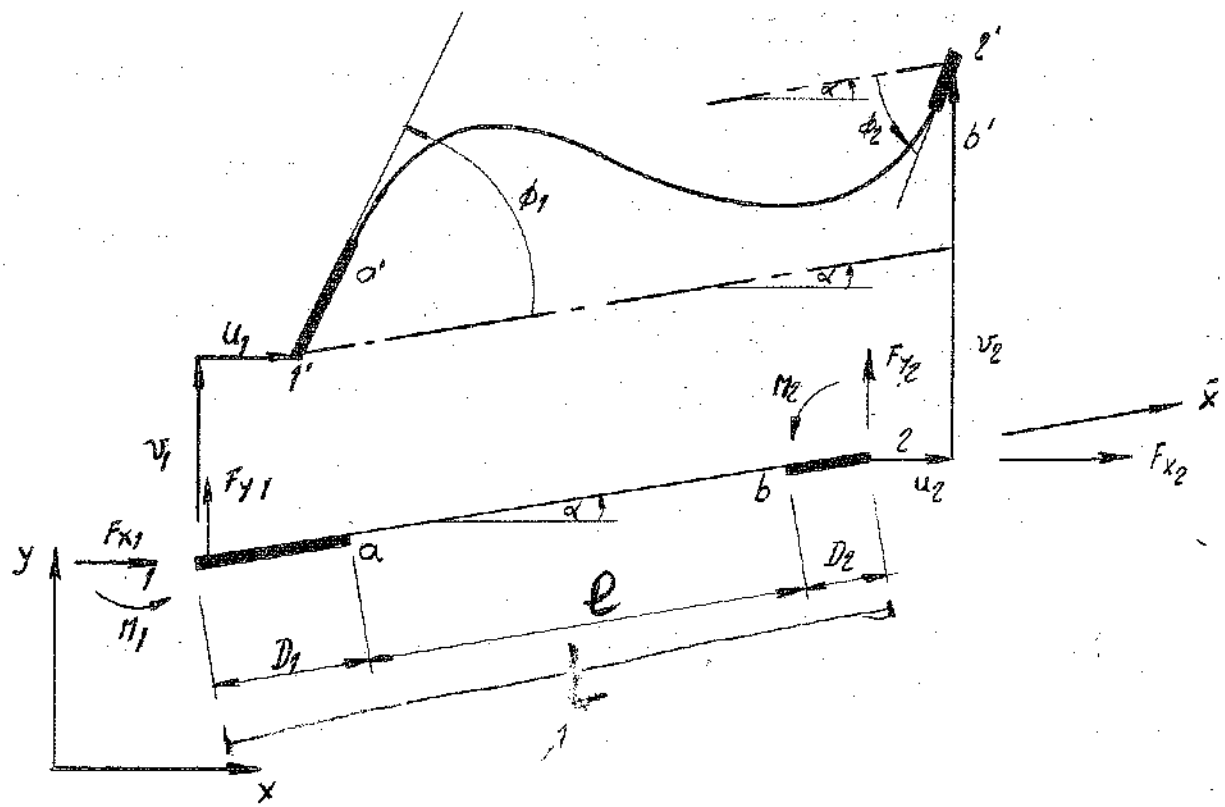


Figura 2

La matriz de rigidez [B] está dada por:

$$[B] = [a]^T \; [k] \; [a]$$

en que

$$[a] \quad \begin{bmatrix} (-\text{sen}\alpha)/L & (\cos\alpha)/L & 1+D1/L & (\text{sen}\alpha)/L & (-\cos\alpha)/L & D2/L \\ (-\text{sen}\alpha)/L & (\cos\alpha)/L & D1/L & (\text{sen}\alpha)/L & (-\cos\alpha)/L & 1+D2/L \\ \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & -\cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{2EI}{L}\cdot\frac{2+\beta}{1+2\beta} & \frac{2EI}{L}\cdot\frac{1-\beta}{1+2\beta} & 0 \\ \frac{2EI}{L}\cdot\frac{1-\beta}{1+2\beta} & \frac{2EI}{L}\cdot\frac{2+\beta}{1+2\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}$$

y $\beta = \frac{6EIK}{GAL^2}$

36) UBIK A = Matriz de rigidez de una barra prismática de una estructura reticular plana en coordenadas globales, previamente calculada, que se sumará a la matriz de rigidez de toda la estructura.

B = Matriz de rigidez de toda la estructura en coordenadas globales, previamente definida.

N1 = Número arbitrario asociado con el elemento, como guía del usuario.

N2 = Número asociado con el nudo inicial del elemento.

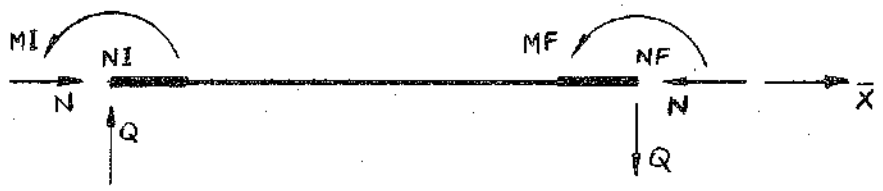
N3 = Número asociado con el nudo final del elemento.

37) ESFU A = Matriz que contiene las propiedades del elemento, definida por el comando RIBA

B = Vector de desplazamientos nodales externos de toda la estructura, previamente calculado.

C = Matriz de (1x4), previamente definida, en la cual quedarán cargados los esfuerzos internos del elemento en el siguiente orden:
- momento en el nudo inicial
- momento en el nudo final
- esfuerzo normal
- esfuerzo de corte

Según la siguiente convención de signos:



N1 = Número arbitrario asociado con el elemento, como guía del usuario.

N2 = Número asociado con el nudo inicial del elemento.

N3 = Número asociado con el nudo final del elemento.

N4 = Código 0- elemento con nudos rígidos
1- elemento rotulado en el nudo inicial
2- elemento rotulado en el nudo final
3- elemento bi-rotulado

38) COND A = Nombre de la matriz que se reordenará y/o eliminarán ciertas filas y/o columnas.

B = Nombre de la nueva matriz.

N1 = Número de filas de B.

N2 = Número de columnas de B.

A continuación de este comando, se leen N1 números enteros, en formato 16I5, que indican las filas de A que quedarán ubicadas en B. Luego se leen N2 números enteros, en formato 16I5, que indican las columnas de A que quedarán cargadas en B.

5.- Errores que contempla el Programa.-

La versión actual del programa origina los siguientes diagnósticos en caso de producirse errores que no impliquen la cancelación del proceso:

a) Matrices Incompatibles.

Esto significa que en el comando que fue impreso en último lugar, existen dos matrices cuyas dimensiones no corresponden a la operación que se quiere ejecutar.

b) Matriz Indefinida.

En el último comando impreso, existe una matriz que no se ha cargado en memoria, o que no se ha definido con algún comando anterior, y que para este comando esa matriz debería estar definida.

c) Operación Indefinida.

El último comando impreso no es válido.

d) Matriz definida previamente

En el último comando impreso, la matriz que debe resultar de esa operación tiene un nombre ya asignado a otra matriz.

e) Memoria Excedida.

Con el último comando impreso, se excedió el número de 15.000 elementos, máximo para todo el programa.

f) Exceso de matrices en memoria.

En el último comando impreso se excedió el número de 50 nombres de matrices, máximo del programa.

Como se indicó previamente, estos diagnósticos corresponden a errores que no originan la cancelación del proceso. Una vez que se imprime el mensaje, se inicializa el programa y se busca el comando EMPE del siguiente trabajo. Si no existe un trabajo a continuación, el programa termina en forma anormal, con un error de FORTRAN que indica: "fin de tarjetas en la lectora".

Existe otro tipo de errores, no detectados por el programa, que originarán la cancelación del proceso. Tales situaciones corresponden, por ejemplo, a perforación múltiple, uso de caracteres inválidos, etc.

EJEMPLO DE APLICACION SMOE A MARCOS PLANOS.

Se resuelve la estructura que se muestra en la Figura 3:

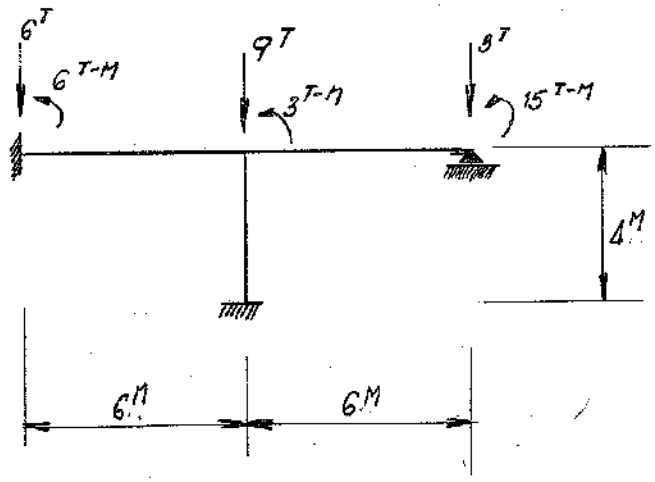


FIGURA 3.

PROPIEDADES.

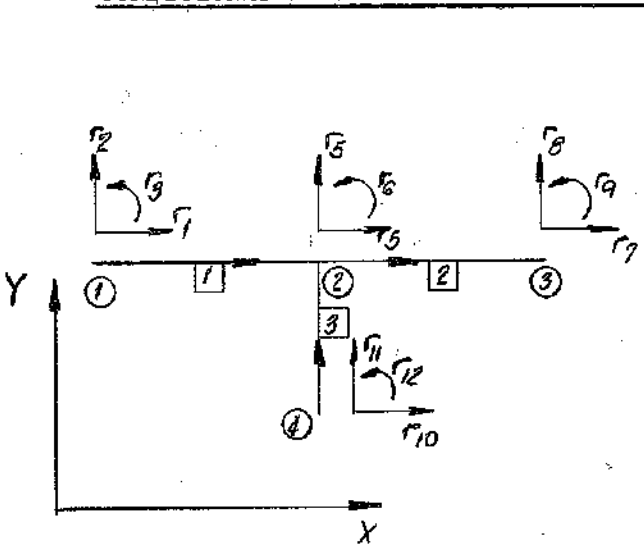
VIGAS : $I = 0.05\ M^4$ COLUMNAS : $I = 0.025\ M^4$

$A = 0.60\ M^2$ $A = 0.30\ M^2$

$\kappa = 1.2$ $\kappa = 1.2$

$E = 3 \times 10^6\ |T/M^2|$; $G = 0.4\ E$

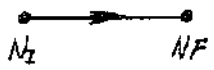
DEFINICION DE GRADOS DE LIBERTAD, NUMERACION DE NUDOS Y BARRAS Y CONDICIONES DE APOYO.



: GRADOS DE LIBERTAD

: NUDOS

: BARRAS



: ORIENTACION DEL EJE LONGITUDINAL DE LA BARRA, DE NUDO INICIAL A NUDO FINAL.

(X,Y): SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS.

CONDICIONES DE APOYO :

$r_1 = r_2 = r_3 = r_7 = r_8 = r_{10} = r_{11} = r_{12} = 0.$

ENTRADA DE DATOS.

```
EMPP
CCME                                                    1
- *** EJEMPLO DE APLICACION DEL PROGRAMA  S M O E  A MARCOS PLANOS ***
CERC     K C()                                          12      12
CERC     KP()                                           6       6
CERC     S ()                                           1       4
RTPA     PRCP     KP                                    1
Fila 6.0   0.0   3000000.   1200000.                    0.05    0.6     1.2     0.     0.
                                                         I       A       K      D1     D2
IMPR     KP       -                                     1       2
                                                       nudos  elementos
   MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL BARRAS 1 Y 2
UBIK     KP       K                                     1       1       2
                                                       nudo    nudo    nudo
UBIK     KP       K                                     2       2       3
                                                       barra   barra   barra
RTPA     PRCP1    KP                                    3
Fila 0.     4.0  3000000.   1200000.   0.825   0.3   1.2   0.    0.
IMPR     KP       -                                     1       2
                                                       nudos  elementos
   MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL BARRA 3
UBIK     KP       K                                     3       4       2
IMPR     K(12x12)  -                                    1       2
   MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE TODA LA ESTRUCTURA
CCRC     K        KRED                                  4       4
                                                       nudos   nudos
     4     5     6     9                                izquierdo
                                                        del grupo
     4     5     6     9
IMPR     KRED     -                                     1       2
   MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA
CARC     R                                              4       1
Fila   0.    -9.    3.    15.
IMPR     R        -                                     1       1
```

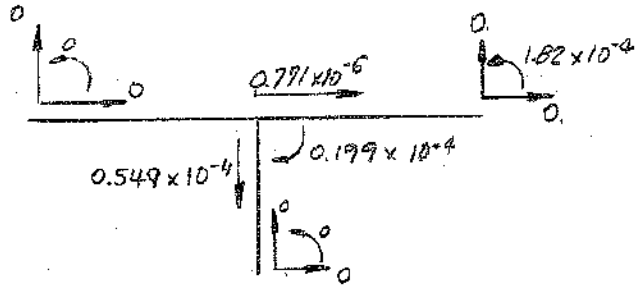
```
   VECTOR DE FUERZAS NODALES PERDIDO
INSI     KREC
MULT     KNUD     R        DESP
IMPR     DESP     -                                  1
   DESPLAZAMIENTO F(4), F(5) ,F(6), F(9)
CARG     A                                           12      4
                                                     filas   cols
 12*0.,1.,4*0.,1.,4*0., 1., 12*0., 1., 12*0.,
MULT     A        DESP     RG                                          (col sup)
ESFL     PROP     RG       S                          1       1       2       0
IMPR     S        -                                   1       4       Upper.
   ESFUERZOS MA,MB,N Y Q PARA BARRA 1
ESFU     FRCP     RG       S                          2       2       3
IMPR     S        -                                   1       4               0
   ESFUERZOS MA,MB,N Y Q PARA BARRA 2
ESFL     FRCP1    RG       S                          3       4       2
IMPR     S        -                                   1       4
   ESFUERZOS MA,MB,N Y Q PARA BARRA 3
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[illegible] 12×2

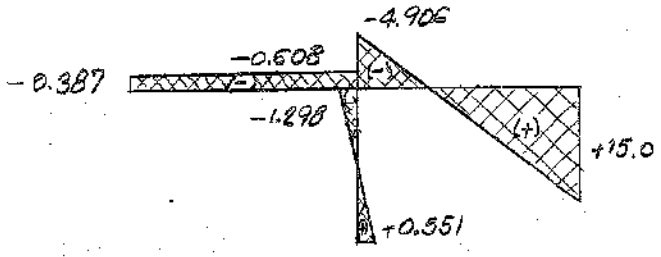
RESULTADOS FINALES.

a) DESPLAZAMIENTOS NODALES.

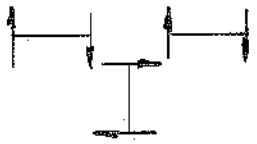


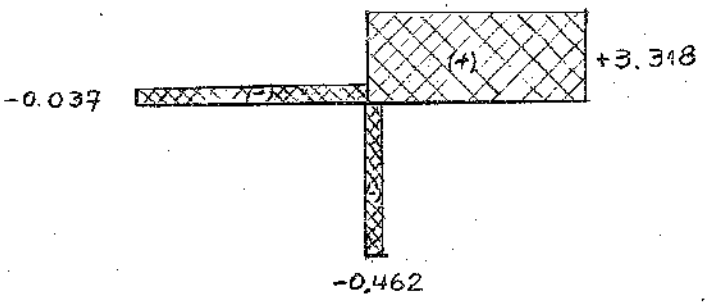
b) DIAGRAMA DE MOMENTOS : CONVENCION POSITIVA TRACCION EN FIBRA

SEGMENTOS



c) DIAGRAMA DE ESFUERZOS DE CORTE : CONVENCION POSITIVA.





EJEMPLO DE APLICACION DE SMOE AL METODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Se resuelve la estructura que se muestra en la Figura 4 (EJEMPLO DEL ZIENKIEWICZ, PAG. 36, EDICION 1967).

DATOS : $t = 1$

$E = 30000.$ MATERIAL ISOTROPICO

$\nu = 0.15$

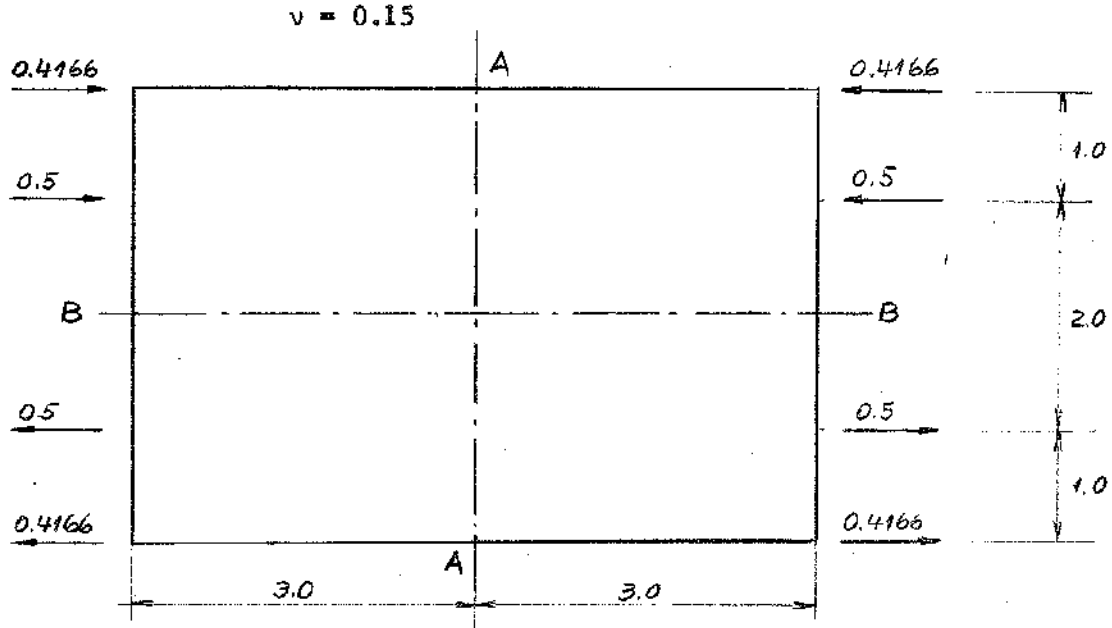


FIGURA 4.

Aprovechando las condiciones de simetría del sistema estructura - carga con respecto al eje A-A, y la antimetría con respecto a B-B, el problema se reduce a resolver la estructura indicada en Figura 5.

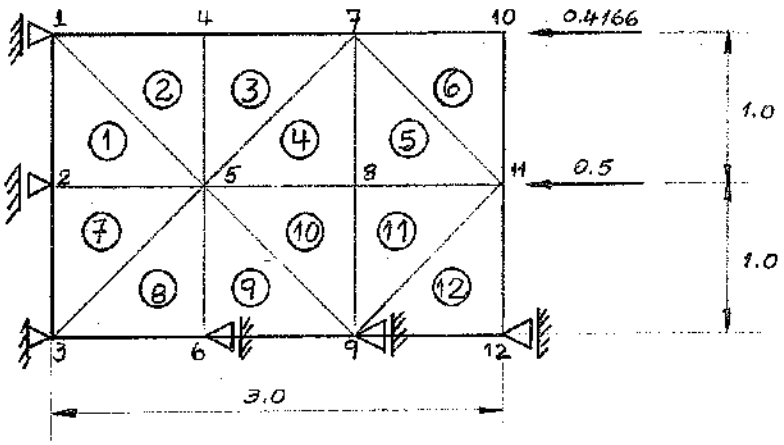


FIGURA 5.

ENTRADA DE DATOS.

```
ENPE
COME                                                    2
                    *** CURSO ELEMENTOS FINITOS , OCTUBRE 1973  ***
                    *** PROBLEMA EJEMPLO , ZIENKIEWICZ , PAG.36 ***
CEPC    K                                               24      24
CEPC    KE                                              6       6
CEPC    SIGM                                            1       3
MREL    PROP1   KE                                      1
1. 0. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK    KE      K                                       1       2       5       1
MREL    PROP2   KE                                      2
1. -1. 1. 0. 1. 30000. 0.15
CARK    KE      K                                       2       1       5       4
MREL    PROP3   KE                                      3
1. 1. 0. 1. 1. 30000.  0.15
CARK    KE      K                                       3       5       7       4
MREL    PROP4   KE                                      4
1. 0. 1. 1. 1. 30000. 0.15
CARK    KE      K                                       4       5       8       7
MREL    PROP5   KE                                      5
1. 0. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK    KE      K                                       5       8       11      7
MREL    PROP6   KE                                      6
1. -1. 1. 0. 1. 30000. 0.15
CARK    KE      K                                       6       7       11      10
MREL    PROP7   KE                                      7
1. 1. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK    KE      K                                       7       3       5       2
MREL    PROP8   KE                                      8
1. 0. 1. 1. 1. 30000. 0.15
CARK    KE      K                                       8       3       6       5
```

```
MREL     PFCP5    KE                          9
1. 0. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK     KE       K                           9      6      9      5
MREL     PFCP10   KE                         10
1. -1. 1. 0. 1. 30000. 0.15
CARK     KE       K                          10      5      9      8
MREL     PFCP11   KE                         11
1. 1. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK     KE       K                          11      9     11      8
MREL     PFCP12   KE                         12
1. 0. 1. 1. 1. 30000. 0.15
CARK     KE       K                          12      9     12     11
CARG     P                                   24      1
18*0. -0.416667 0. -0.5  23*0.
IMPRIMA  P        -                           1
         *** VECTOR DE FUERZAS EN LOS NUDOS ***
CONE                                          1
         *** CONDICIONES DE BORDE ***
CARCLE   ALX                                  1      1
1000000000.
SUSM     K        AUX                         1      1
SUSM     K        ALX                         3      3
SUSM     K        AUX                         5      5
SUSM     K        AUX                         6      6
SUSM     K        ALX                        11     11
SUSM     K        ALX                        17     17
SUSM     K        ALX                        23     23
INSI     K
MULT     K        P        U
IMPRIMA  U        -                           1
         *** VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS NODALES ***
```

```
CCME            -                                  1
        *** SE CALCULARA LAS TENSIONES SOLO EN LOS ELEMENTOS 3 4 9 Y 10 ***
TENS    FECP3   U       SIGM                       3     5     7     4
IMPRIMA SIGM    -                                  1     5
        *** TENSIONES EN EL ELEMENTO 3 ***
TENS    FECP4   U       SIGM                       4     5     8     7
IMPRIMA SIGM    -                                  1     5
        *** TENSIONES EN EL ELEMENTO 4 ***
TENS    FECP9   U       SIGM                       9     6     9     5
IMPRIMA SIGM    -                                  1     5
        *** TENSIONES EN EL ELEMENTO  9 ***
TENS    FECP10  U       SIGM                      10     5     9     8
IMPRIMA SIGM    -                                  1     5
        *** TENSIONES EN EL ELEMENTO 10 ***
FIN
```

RESULTADOS.

```
EMPE                                        0       0       0       0       0.0       0.0
CCME                                        2       0       0       0       0.0       0.0
          *** CURSO ELEMENTOS FINITOS , OCTUBRE 1973  ***
          *** PROBLEMA EJEMPLO , ZIENKIEWICZ , PAG.36 ***
CERO K                                     24      24       0       0       0.0       0.0
   24 FILAS     24 COLUMNAS
CERO KE                                     6       6       0       0       0.0       0.0
    6 FILAS      6 COLUMNAS
CERO SIGM                                   1       3       0       0       0.0       0.0
    1 FILAS      3 COLUMNAS
PREL PROP1     KE                           1       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 0. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                            1       2       5       1       0.0       0.0
PREL PROP2     KE                           2       0       0       0       0.0       0.0
|              1. -1. 1. 0. 1. 20000. 0.15
CARK KE        K                            2       1       5       4       0.0       0.0
PREL PROP3     KE                           3       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 1. 0. 1. 1. 30000.  0.15
CARK KE        K                            2       5       7       4       0.0       0.0
PREL PROP4     KE                           4       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 0. 1. 1. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                            4       5       8       7       0.0       0.0
PREL PROP5     KE                           5       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 0. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                            5       8      11       7       0.0       0.0
PREL PROP6     KE                           6       0       0       0       0.0       0.0
|              1. -1. 1. 0. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                            6       7      11      10       0.0       0.0
PREL PROP7     KE                           7       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 1. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                            7       2       5       2       0.0       0.0
PREL PROP8     KE                           8       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 0. 1. 1. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                            8       3       6       5       0.0       0.0
PREL PROP9     KE                           9       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 0. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                            9       6       9       9       0.0       0.0
PREL PROP10    KE                          10       0       0       0       0.0       0.0
|              1. -1. 1. 0. 1. 20000. 0.15
CARK KE        K                           10       9       9       8       0.0       0.0
PREL PROP11    KE                          11       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 1. 0. 1. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                           11       9      11       8       0.0       0.0
PREL PROP12    KE                          12       0       0       0       0.0       0.0
|              1. 0. 1. 1. 1. 30000. 0.15
CARK KE        K                           12       9      12      11       0.0       0.0
CARG P                                     24       1       0       0       0.0       0.0
   24 FILAS      1 COLUMNAS
|              10*0. -0.416667 0. -0.5  .2500.
INPR P         -                            1       0       0       0       0.0       0.0
```

*** VECTOR DE FUERZAS EN LOS NUDOS ***

```
          1
    1   0.0
    2   0.0
    3   0.0
    4   0.0
    5   0.0
    6   0.0
    7   0.0
    8   0.0
    9   0.0
   10   0.0
   11   0.0
   12   0.0
   13   0.0
   14   0.0
   15   0.0
   16   0.0
   17   0.0
   18   0.0
   19  -0.4166667E 00
   20   0.0
   21  -0.2500000E 00
   22   0.0
   23   0.0
   24   0.0
```

```
CCME    *** CONDICIONES DE BORDE ***                    1     0     0     0    0.0    0.0
CARG ALX                                                1     1     0     0    0.0    0.0
  1 FILAS     1 COLUMNAS
|                 1CCCCCCCCC.                                                                |
SLSM K      ALX
 FILA NUMERO   1 COLUMNA NUMERO   1                      1     1     0     0    0.0    0.0
SLSM K      ALX
 FILA NUMERO   2 COLUMNA NUMERO   2                      2     2     0     0    0.0    0.0
SLSM K      ALX
 FILA NUMERO   5 COLUMNA NUMERO   5                      5     5     0     0    0.0    0.0
SLSM K      ALX
 FILA NUMERO   6 COLUMNA NUMERO   6                      6     6     0     0    0.0    0.0
SLSM K      ALX
 FILA NUMERO  11 COLUMNA NUMERO  11                     11    11     0     0    0.0    0.0
SLSM K      ALX
 FILA NUMERO  17 COLUMNA NUMERO  17                     17    17     0     0    0.0    0.0
SLSM K      ALX
 FILA NUMERO  23 COLUMNA NUMERO  23                     23    23     0     0    0.0    0.0
BASI K                                                   0     0     0     0    0.0    0.0
MULT K          F       L                                0     0     0     0    0.0    0.0
IMPR U          -                                        1     0     0     0    0.0    0.0
```

*** VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS NODALES ***

	1
1	-0.44571644E-05
2	0.45227194E-05
3	-0.42380030E-05
4	0.40669225E-05
5	0.23782278E-10
6	0.78039442E-14
7	-0.28224318E-04
8	0.12437744E-04
9	-0.14674425E-04
10	0.83142350E-05
11	-0.55336255E-11
12	0.10011374E-04
13	-0.56650334E-04
14	0.35325840E-04
15	-0.45351745E-04
16	0.32314525E-04
17	0.17844041E-04
18	0.26028240E-04
19	-0.63540668E-04
20	0.45545335E-04
21	-0.45195018E-04
22	0.59641515E-04
23	-0.23320151E-10
24	0.67205124E-04

```
CCPE    *** SE CALCULARA LAS TENSIONES SOLO EN LOS ELEMENTOS 3 4 9 Y 10 ***   0     0     0    0.0    0.0
TENS PROP3      L       SIGM                            3     5     7     4    0.0    0.0
IMPR SIGM       -                                       1     5     0     0    0.0    0.0
```

*** TENSIONES EN EL ELEMENTO 3 ***

	1	2	3
1	-0.03370	0.05864	0.06209

```
TENS PROP4      L       SIGM                            4     5     4     3    0.0    0.0
IMPR SIGM       -                                       1     5     0     0    0.0    0.0
```

*** TENSIONES EN EL ELEMENTO 4 ***

	1	2	3
1	-0.05960	0.04251	-0.04023

```
TENS PROP9      L       SIGM                            9     6     6     9    0.0    0.0
IMPR SIGM       -                                       1     5     0     0    0.0    0.0
```

*** TENSIONES EN EL ELEMENTO 9 ***

	1	2	3
1	-0.00185	-0.05222	0.04628

```
TENS PROP10     L       SIGM                           10     5     5     8    0.0    0.0
IMPR SIGM       -                                       1     5     0     0    0.0    0.0
```

*** TENSIONES EN EL ELEMENTO 10 ***

	1	2	3
1	-0.03652	0.06456	-0.06513

LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON :

a) DESPLAZAMIENTOS

NUDO	$\mu \times 10^{-5}$	$v \times 10^{-5}$
1	0.	0.453
2	0.	0.407
3	0.	0.
4	- 2.84	1.44
5	- 1.45	0.831
6	0.	1.00
7	- 5.65	3.32
8	- 2.94	3.24
9	0.	2.80
10	- 8.35	6.96
11	- 4.52	6.46
12	0.	6.72

b) TENSIONES

ELEMENTO	σ_x	σ_y	σ_{xy}
3	- 0.8337	0.0586	0.0631
4	- 0.4530	- 0.0425	- 0.0402
9	- 0.0078	- 0.0522	0.0463
10	- 0.4369	0.0646	- 0.0691

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

EN

INGENIERIA CIVIL

Curso de Extensión: 3 al 7 de Diciembre, 1973

Sección Estructuras

Departamento de Obras Civiles

Universidad de Chile

Tomás Guendelman
Mauricio Katanella
Rodolfo Saragoni
Mauricio Sarrazin
Patricia Vivero

Manual M2.- EP-1: Elementos Finitos en Elasticidad Plana

Programador: E.L. Wilson

PROGRAMA EP-1 :
ANALISIS DE ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES PLANAS.

El propósito de este programa es determinar las deformaciones y las tensiones en estructuras bidimensionales de forma arbitraria, considerando tensiones planas.

El programa incluye los efectos de las condiciones de borde de desplazamiento y de tensiones, de cargas concentradas, de fuerzas de gravedad y de cambios de temperatura. Además se incluye material de propiedades bilineales mediante un método de aproximaciones sucesivas.

El primer paso en el análisis estructural de un problema bidimensional de tensiones planas, es seleccionar una representación en elementos finitos del cuerpo.

Los elementos y los puntos nodales se numeran separadamente partiendo de uno.

El siguiente grupo de tarjetas perforadas define numéricamente la estructura bidimensional a analizar:

A.- Tarjeta de Identificación - (72H)

Las columnas 1 hasta la 72 de esta tarjeta contienen información que será impresa con los resultados.

B.- Tarjeta de Control - (4I5, 3F10.2, 2I5)

Columnas 1 - 5 Número de puntos nodales (500 máximo)
6 - 10 Número de elementos (504 máximo)
11 - 15 Número de materiales diferentes (12 máximo)
16 - 20 Número de tarjetas de presiones en el borde (200 máximo)
21 - 30 Aceleración en la dirección ~~Y~~ X

31 - 40 Aceleración en la dirección ~~X~~ Y

41 - 50 Temperatura de referencia (temperatura para la cual el cuerpo está libre de tensiones)

51 - 55 Número de aproximaciones

C.- Información de las propiedades del material.

Para cada material diferente debe incluirse el siguiente grupo de tarjetas:

Primera tarjeta - (2I5, 2F10.0)

Columnas 1 - 5 Identificación del material - cualquier número entre 1 y 12

6 - 10 Número de las diferentes temperaturas para las cuales están dadas las propiedades - 8 máximo

11 - 20 Densidad del material

Tarjeta siguiente.- (8F10.0) Una tarjeta para cada temperatura.

Columnas 1 - 10 Temperatura

11 - 20 Módulo de elasticidad en compresión

21 - 30 Razón de Poisson

31 - 40 Módulo de elasticidad en tracción

41 - 50 Factor de corte de la fundación - G/H^2, o el área de un elemento barra.

51 - 60 Coeficiente de expansión térmica - α

61 - 70 Tensión inicial en un elemento barra

D.- Tarjetas de Puntos Nodales.- (2I5, 5F10.0)

Una tarjeta para cada punto nodal con la siguiente información:

Columnas 1 - 5 Número del punto nodal

6 - 10 Número que indica si se especificarán desplazamientos o fuerzas

11 - 20 Ordenada X

21 - 30 Ordenada Y

31 - 40 XR
41 - 50 XZ
51 - 60 Temperatura

Si el número en la columna 10 es:

0	XR	es la carga especificada según X y
	XZ	es la carga especificada según Y
1	XR	es el desplazamiento especificado según X y
	XZ	es la carga especificada según Y
2	XR	es la carga especificada según X y
	XZ	es el desplazamiento especificado según Y
3	XR	es el desplazamiento especificado según X y
	XZ	es el desplazamiento especificado según Y.

Todas las cargas se consideran como fuerzas totales actuando en un elemento de espesor unitario. Las tarjetas de los puntos nodales deben estar en secuencia numérica. Si se omiten tarjetas, los puntos nodales que faltan son generados en intervalos iguales sobre una línea recta entre los puntos nodales definidos. Las temperaturas necesarias se determinan por interpolación lineal. El código de borde (columna 10), XR y XZ son iguales a cero.

E.- Tarjetas de Elementos.- (6I5)

Una tarjeta para cada elemento:

Columnas 1 - 5 Elemento
6 - 10 Punto Nodal I

11 - 15 Punto Nodal J
16 - 20 Punto Nodal K
21 - 25 Punto Nodal L
26 - 30 Identificación del material

En un sistema de coordenadas cartesianas el orden de los puntos nodales debe tomarse contrario al sentido de los punteros del reloj. La diferencia máxima entre los puntos I y L debe ser menor de 27.

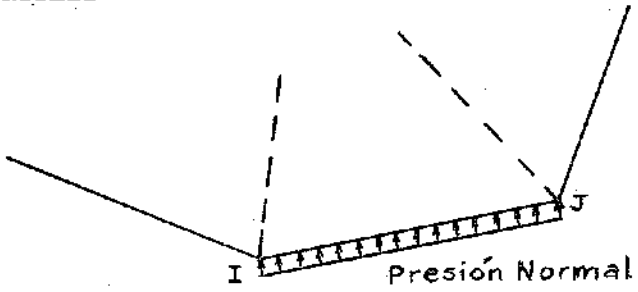
Las tarjetas de elementos deben ubicarse en secuencia numérica. Si se omite una tarjeta, el programa genera automáticamente la información que falta incrementando en uno los I, J, K y L anteriores. El código de identificación del material para las tarjetas generadas se toma igual al valor de la última tarjeta. La última tarjeta de elemento no puede omitirse.

También pueden usarse elementos triangulares, que se identifican repitiendo el último punto nodal (Por ejemplo: I J K K). Elementos de barra se identifican numerándolos en la forma I J J I.

F.- Tarjetas de Presión.- (2I5, 1F10.0)

Una tarjeta para cada elemento de borde que esté sometido a presión normal:

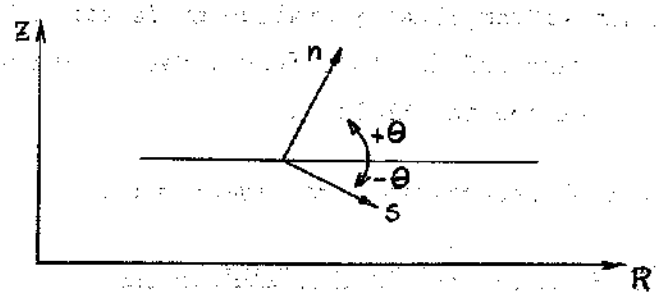
Columnas: 1 - 5 Punto Nodal I
6 - 10 Punto Nodal J
11 - 20 Presión Normal



Como se muestra en la figura, los elementos de borde deben estar a la izquierda al recorrerlos desde I a J. Una presión en la superficie hacia el elemento tiene signo positivo.

G.- Condiciones de borde oblícuas.-

Si el número en las columnas 6 - 10 de la tarjeta de puntos nodales es diferente a 0, 1, 2 ó 3, se interpretará como una magnitud de un ángulo en grados. Este ángulo se muestra en la figura siguiente:



Los términos en las columnas 31 - 50 de la tarjeta de puntos nodales se interpretan como:

XR es la carga especificada en dirección s

XZ es el desplazamiento especificado en dirección n

El ángulo θ debe ser entregado siempre como un ángulo negativo, variando entre - 0.001 y - 180 grados. Por lo tanto, un ángulo de + 1.0° debe ponerse como -179°.

Los desplazamientos correspondientes a puntos nodales con condiciones de borde oblícuas, entregados por el programa, deben interpretarse del siguiente modo:

u_x = desplazamiento en la dirección s

u_y = desplazamiento en la dirección n

H.- Información de salida

El programa entrega la siguiente información:

1.- Impresión de datos de entrada
2.- Desplazamientos de los puntos nodales
3.- Tensiones en el centro de cada elemento.

FORMA DE USO (tarjetas de control)

El programa se encuentra compilado y grabado en la cinta Nº 211 del Centro de Computación de la Universidad de Chile (CEC). Esta cinta está incializada con "STANDARD LABEL" con el nombre "ELEFIN".

Las tarjetas de control necesarias para llamarlo son:

TARJETAS DE CØNTRØL PRØGRAMA EP-1.

CØL. 1

```
// MEMØ0612 JØB  'A,B' ,
//  EXEC FØRTGLG,PARM.LKED=(MAP,ØVLY,LIST)
// LKED.SYSIN DD UNIT=2400,VØL=SER=ELEFIN,DSN=DECK,
//  DISP=ØLD,LABEL=1
// GØ.FT11F001 DD UNIT=180,LABEL=(1,NL),VØL=SER=AAA
// GØ.FT12F001 DD UNIT=181,LABEL=(1,NL),VØL=SER=BBB
// GØ.SYSIN DD *
          DATØS PRØBLEMA 1
          DATØS PRØBLEMA 2
          DATØS PRØBLEMA N
TARJETA EN BLANCØ
TARJETA EN BLANCØ
/*
//
```

Como se indica en las tarjetas de control,para la ejecución del programa se necesita montar las siguientes cintas:

- CINTA DE OPERACION EN UNIDAD 180
- CINTA DE OPERACION EN UNIDAD 181
- CINTA Nº 211 (CEC) EN UNIDAD 182 ó 183

esta cinta será pedida por la consola de computador con el nombre "ELEFIN"

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

EN

INGENIERIA CIVIL

Curso de Extensión: 3 al 7 de Diciembre, 1973

Sección Estructuras

Departamento de Obras Civiles

Universidad de Chile

Tomás Guendelman
Mauricio Katanella
Rodolfo Saragoni
Mauricio Sarrazin
Patricia Vivero

Manual M3.- EP-2: Elementos Finitos Refinados en Elasticidad Plana.

Programador: Mauricio Sarrazin A.

MANUAL DE USO

PROGRAMA EP-2

1.- INTRODUCCION.

El programa EP-2 fue elaborado especialmente para probar el comportamiento de un elemento finito rectangular de 24 grados de libertad, en su aplicación a problemas de elasticidad plana cuya forma general correspondiera a la yuxtaposición de áreas rectangulares básicas. En especial, se ha usado para estudios de distribución de tensiones en vigas altas y en placas perforadas como elementos estructurales de edificios.

El elemento finito en referencia tiene cuatro puntos nodales, uno en cada vértice, y seis grados de libertad en cada punto nodal, dos de los cuales son los desplazamientos en dos direcciones ortogonales y el resto las derivadas parciales de estos desplazamientos con respecto a un sistema cartesiano de coordenadas. Si se denominan u y v los desplazamientos en las direcciones coordenadas (ver figura 1), los desplazamientos generalizados en un nudo cualquiera son :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ v \\ v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\}$$

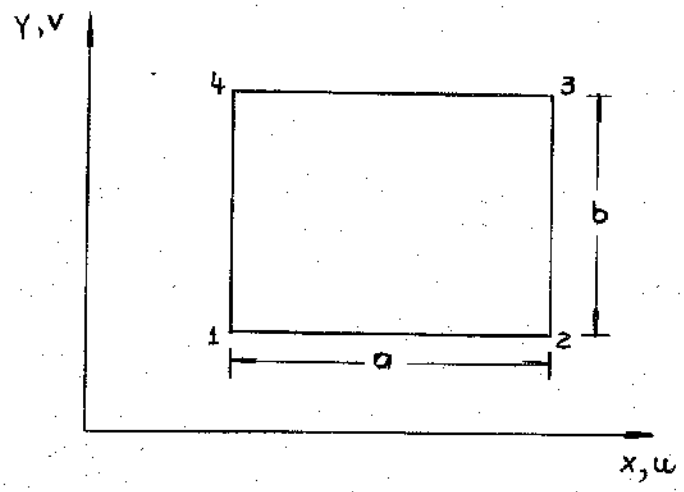


FIGURA 1.

Al contar con 24 grados de libertad por elemento, es posible usar expansiones polinómicas con 12 parámetros tanto para u como para v, vale decir

$$u = \alpha_1+\alpha_2\ x + \alpha_3\ y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6\ y^2 + \alpha_7\ x^3 + \alpha_8\ x^2y + \alpha_9\ xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3y + \alpha_{12} xy^3$$

$$v = \beta_1+\beta_2\ x + \beta_3\ y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6\ y^2 + \beta_7\ x^3 + \beta_8\ x^2y + \beta_9\ xy^2 + \beta_{10} y^3 + \beta_{11} x^3y + \beta_{12} xy^3$$

De esta manera la distribución de tensiones dentro del elemento en función de las coordenadas tiene una variación cúbica.

Para mayores detalles con respecto a la teoría, véase la referencia 1.

2.- Organización del Programa.

El programa EP-2 está hecho en lenguaje FORTRAN-IV. Se encuentra seccionado en subprogramas de manera de sacar el máximo provecho, a través de una estructura de "overlay", del computador IBM-360/40 de 128 K de la Universidad de Chile. Como memoria auxiliar usa discos 2311 en acceso directo.

En el programa se pueden distinguir diversas secciones, según sus funciones. Existen bloques para la interpretación y elaboración de los datos de entrada, para la formación de la matriz de rigidez global, para la resolución del sistema de ecuaciones, para la obtención de las tensiones internas y, finalmente, para la impresión de resultados, ya sea en forma de tabulaciones o de gráficos hechos mediante la impresora.

La solución del sistema de ecuaciones se realiza mediante el algoritmo de eliminación de Gauss. El problema se divide automáticamente en subestructuras y se resuelve haciendo uso de memoria auxiliar.

3.- Capacidad.

El programa, en su versión actual, es capaz de resolver un problema de hasta 8 elementos en el sentido horizontal y 16 elementos en el sentido vertical. El número de condiciones de borde de desplazamientos posibles es 100. Se pueden especificar un número cualquiera de fuerzas concentradas y 200 fuerzas distribuídas en los bordes. Se pueden solicitar 100 resultados en cualquier punto del dominio y dibujar los desplazamientos y tensiones en un número ilimitado de secciones, ya sea en sentido horizontal o vertical, siempre que cada sección no tenga más de 100 puntos.

El problema puede ser de tensiones o de deformaciones planas, isotrópico u ortotrópico.

4.- Uso.

4.1. Generalidades.

La geometría del problema se especifica primero como un rectángulo sólido, como se indica en la figura 2, y luego se divide en elementos mediante líneas rectas paralelas a los lados. Estas líneas definen renglones y columnas, que se numeran de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha, respectivamente. Un elemento cualquiera queda identificado por el número del renglón y de la columna en que se encuentra ubicado, puestos en ese orden. Un punto dentro del plano queda determinado especificando primero el elemento al cual pertenece (renglón, columna) y luego las coordenadas locales del punto dentro del elemento (distancia al borde izquierdo y distancia al borde inferior).

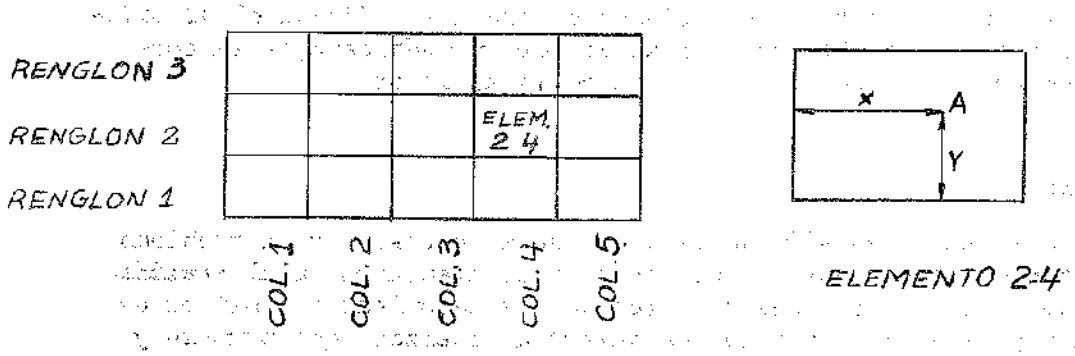


FIGURA 2.

Una vez definido el rectángulo base, la forma real del cuerpo se define mediante especificaciones de huecos rectangulares (HOLES). Un ejemplo se puede apreciar en la figura 3.

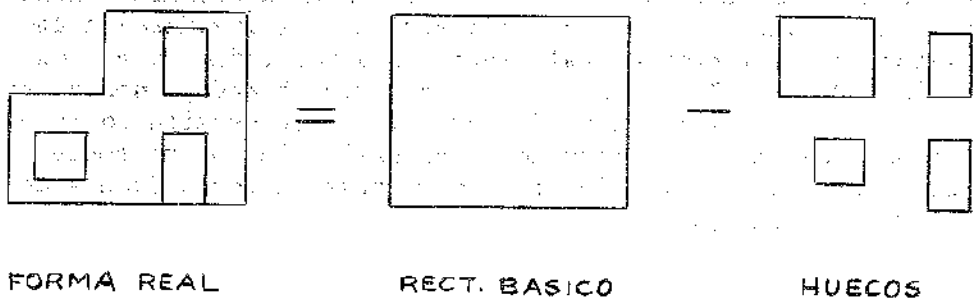


FIGURA 3.

4.2. Convenciones para los datos de entrada.

Los datos deben entregarse en el orden que se especifica más abajo. Se pueden ocupar 80 columnas de cada tarjeta. Si se necesita más de una tarjeta para terminar una línea de datos, se puede usar una tarjeta de continuación poniendo un asterisco (*), separado por blancos, en la tarjeta que se quiere continuar. Después del signo * se puede poner cualquier comentario. De esta manera, si se quiere intercalar un comentario dentro de los datos, basta con poner un asterisco en la primera columna y escribir lo que se desee a continuación.

Ejemplo :

```
COLUMNS   8  10.  10.  20.  20.     50.  10.  10.  20.

*  ESTE ES EL UNICO CAMBIO EN ESTOS DATOS

ROWS   4  10.  10.  10.  10.

etc.
```

Las palabras y números deben estar separados por uno o más blancos y pueden quedar en cualquier posición dentro de la tarjeta.

Los números reales deben tener un punto decimal.

Los número enteros no deben tener punto decimal.

En lo que sigue, los paréntesis cuadrados [ ] y la información que contengan, deben reemplazarse por los datos de entrada en la forma apropiada para representar la información requerida.

4.3. Instrucciones de entrada de datos.

4.3.1. [título]

La primera tarjeta debe contener un título alfanumérico para el problema. Se pueden ocupar las 80 columnas de la tarjeta.

4.3.2. Geometría.

La geometría del problema se especifica mediante las siguientes instrucciones :

COLUMNS [número de columnas] [lista con los anchos de las columnas]
(entero) (reales)

ROWS [número de renglones] [lista con los altos de los renglones]
(entero) (reales)

HOLES [número de huecos]
(entero)

[elemento inicial] TO [elemento final]
(enteros) (enteros)

---------- otro hueco ----------

(tantas tarjetas como huecos haya)

La instrucción "HOLES" es operativa.

Ejemplo : (ver figura 4)

COLUMNS 5 10. 10. 20. 5. 10.

ROWS 6 8. 8. 8. 8. 8. 8.

HOLES 2

2 2 TO 3 4

5 3 TO 6 3

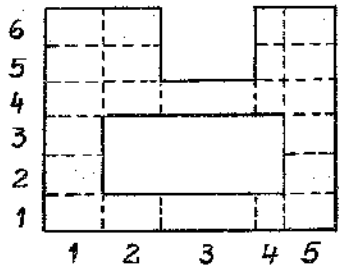


FIGURA 4.

4.3.3. Propiedades de los elementos.

Las siguientes instrucciones se usan para especificar las propiedades de los elementos :

ELEMENTS TYPE [k] ALL [espesor] [E_1] [ν_1] [E_2] [ν_2] [G]

EXCEPT

[elemento] TYPE [k] [espesor] [E_1] [ν_1] [E_2] [ν_2] [G]

- - - - - - - - - otra excepción - - - - - - - - - - -

(tantas excepciones como sea necesario)

Explicación : el programa supone primero que todos los elementos tienen las mismas propiedades. Si algunos de éstos tienen propiedades diferentes, hay que especificarlos uno a uno mediante la instrucción EXCEPT. (Esta última instrucción es optativa).

k indica el tipo de elemento, que puede ser :

- 2 deformaciones planas, isotrópico
- 1 tensiones planas, isotrópico
  0 deformaciones planas, ortotrópico
  1 tensiones planas, ortotrópico

E_1 y E_2 son los módulos de Young
ν_1 y ν_2 son los módulos de Poisson
G es el módulo de corte.

En caso de material isotrópico, sólo deben especificarse el módulo de Young E_1 y el módulo de Poisson ν_1.

Ejemplo :

```
ELEMENTS  TYPE -1  ALL  15.  300000.  0.3
EXCEPT
   2  4   TYPE  1  15.  300000. 0.3  200000.  0.2  100000.
   3  4   TYPE  1  15.  300000. 0.3  200000.  0.2  100000.
```

4.3.4. Cargas.

Las cargas se especifican mediante las instrucciones

CONCENTRATED LOADS

[elemento] [coordenadas locales] [fuerza horizontal] [fuerza vertical]

- - - - - - - - - - - - - - otra carga - - - - - - - - - - - - - - -

(tantas cargas como se desee)

Ejemplo :

CONCENTRATED LOADS

```
5   5   0.  10.  100.   50.
5   5  10.  15.  100.  100.
```

y/o la instrucción

DISTRIBUTED LOADS

[elemento] [tipo] [lado] [X_1] [p_1] [X_2] [p_2] [X_3] [p_3]

- - - - - - - - otra carga - - - - - - - - - - -

(tantas cargas como se desee)

El [tipo] de carga puede ser

0 = tensión normal
1 = tensión de corte

El [lado] corresponde a uno de los lados donde se aplica la carga (ver figura 5)

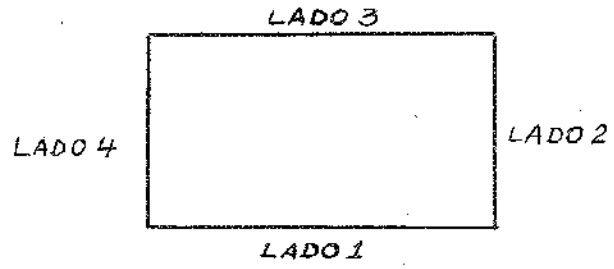


FIGURA 5.

Los valores [X_1], [p_1], [X_2], [p_2], [X_3], [p_3] se explican en la figura 6.

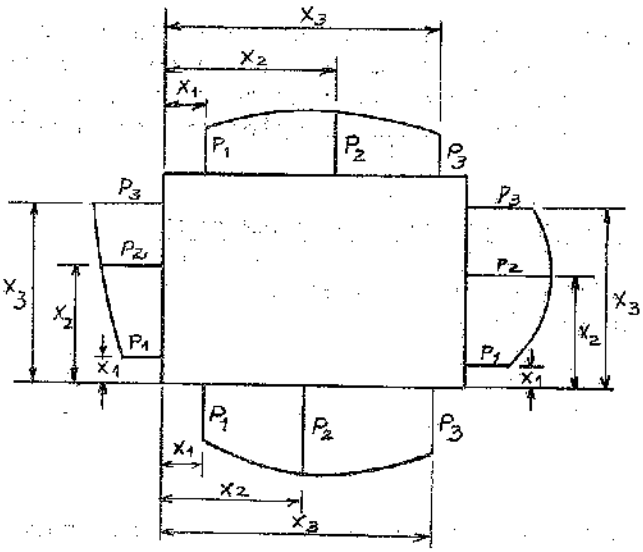


FIGURA 6.

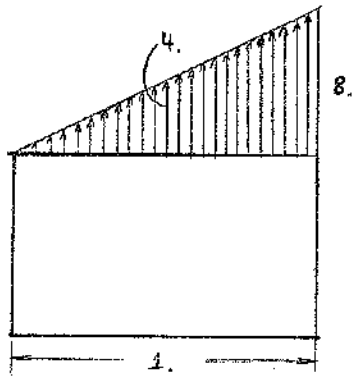
Las direcciones positivas para las cargas son las mismas que las direcciones de los ejes coordenados x e y del elemento.

Ejemplo : La carga especificada mediante la instrucción :

DISTRIBUTED LOADS

1 2 0 3 0. 0. 0.5 4. 1. 8.

corresponde a aquella indicada en la figura 7.



ELEMENTO 1-2

FIGURA 7.

Nota : Las cargas deben especificarse por renglones de elementos en el orden correlativo de éstos, vale decir, dentro de un mismo tipo de cargas (concentradas o distribuidas), primero todas las cargas del primer renglón, luego todas las del segundo renglón, y así sucesivamente.

4.3.5. Condiciones de borde de desplazamientos.

Para especificar las condiciones de borde de desplazamientos se usa la siguiente instrucción :

una de las dos alternativas

BOUNDARY CONDITIONS

CLAMPED

o

[renglón] [nudo] [número de desplazamiento del nudo] [desplazamiento]

- - - - - - - - - - otra condición de borde - - - - - - - - - - - -

(tantas como sea necesario)

La especificación puede ser CLAMPED o bien especificaciones individuales, pero no pueden usarse ambas. La palabra CLAMPED considera el problema empotrado en su parte inferior, vale decir, $u = u_x = v = v_x = 0.$ en cada nudo de la base. En el caso de especificaciones individuales, el número del desplazamiento generalizado a usar es el siguiente :

$1 = u$

$2 = u_x$

$3 = u_y$

$4 = v$

$5 = v_x$

$6 = v_y$

Ejemplo :

BOUNDARY CONDITIONS

1	1	3	0.
1	1	4	0.
2	1	1	0
2	1	2	0.

4.4. Instrucciones de salida de resultados.

Si no se pide ningún resultado, el programa entrega automáticamente los desplazamientos generalizados de los nudos. Si además se necesitan otros resultados, estos deben solicitarse mediante las instrucciones siguientes :

RESULTS

[elemento] [coordenadas locales]

- - - - otro punto - - - - - -

(tantos puntos como se desee)

Con esta instrucción se obtienen los desplazamientos, las deformaciones unitarias y las tensiones, en el punto especificado.

Ejemplo

```
RESULTS
1   2   0.5   0.
1   2   0.5   0.5
2   2   0.5   0.
```

La instrucción RESULTS es optativa.

Si se desea obtener gráficos de los resultados, se pueden usar instrucciones de la forma siguiente :

DRAW

[número de la sección] (entero) { HOR o VER } [elemento] [coordenadas locales] (punto inicial)

[número de puntos] (entero) [intervalo] (real) [esc. de desplaz.] (real) [escala de tensiones] (real)

- - - - otra sección (tantas como se quiera) - - - - - - - - - - - -

La primera tarjeta contiene la palabra DRAW. Luego va una tarjeta por cada sección que se desee dibujar. El número de la sección sólo sirve como identificador. La sección a dibujar puede ser HORizontal o VERtical. Las escalas son número reales que representan el número de unidades que quedarán representadas por aproximadamente 1 cm. en el papel.

Si se especifica una escala negativa, el programa calcula su propia escala para cada figura, usando todo el ancho de papel disponible.

Esta instrucción produce los gráficos de los dos desplazamientos y de las tres tensiones a lo largo de la sección solicitada.

Ejemplo :

```
DRAW
1 HOR 2  1  0.  0.  51  0.01  0.02  0.1
2 VER 1  3  1.  0.  41  0.01   -1.   -1.
```

4.5. Terminación del problema.

La última tarjeta de datos para un problema debe contener la palabra END. Si se desea procesar otro trabajo, debe ponerse inmediatamente a continuación de la tarjeta END del problema anterior.

4.6. Ejemplo de aplicación.

Supóngase que se desea analizar el marco de la figura 8 sometido a la acción de una carga concentrada vertical al centro del vano y de una carga transversal uniformemente distribuída aplicada en la columna izquierda. Se desea obtener como resultados la distribución de tensiones en las secciones (1) y (2) y la posición deformada de las líneas medias de la viga y las columnas (secciones (3), (4) y (5)).

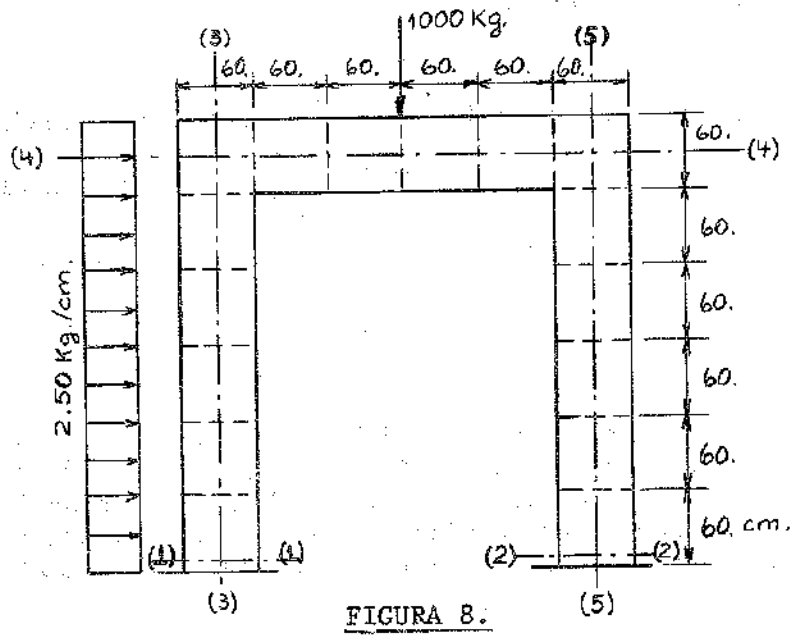


FIGURA 8.

Los datos de entrada serían los siguientes :

```
EJEMPLO MANUAL USO MSA, MARCO 16 ELEMENTOS
* JUNIO DE 1973
COLUMNS  6   60.   60.   60.   60.   60.   60.
ROWS     6   60.   60.   60.   60,   60.   60.
HOLES    1
1   2   TO  5   5
ELEMENTS TYPE -1  ALL  20.   300000.   0.3
CONCENTRATED LOADS
6   4   0.   60.   0.   -1000.
DISTRIBUTED LOADS
1   1   0   4   0.   2.50   30.   2.50   60.   2.50
2   1   0   4   0.   2.50   30.   2.50   60.   2.50
3   1   0   4   0.   2.50   30.   2.50   60.   2.50
4   1   0   4   0.   2.50   30.   2.50   60.   2.50
5   1   0   4   0.   2.50   30.   2.50   60.   2.50
6   1   0   4   0.   2.50   30.   2.50   60.   2.50

BOUNDARY CONDITIONS
CLAMPED

DRAW
1   HOR  1  1  0.   10.   11  6.   -1.   -1.
2   HOR  1  6  0.   10.   11  6.   -1.   -1.
3   VER  1  1 30.    0.   37 10.   -1.   -1.
4   HOR  6  1  0.   30.   37 10.   -1.   -1.
5   VER  1  6 30.    0.   37 10.   -1.   -1.
END
```

5.- Tarjetas de Control.

El programa está compilado y guardado en la cinta ELEFIN, label 3, la cual debe cargarse en cualquiera de las unidades de cinta del computador.

Las tarjetas de control para procesar uno o más problemas son las siguientes :

```
// EXEC FØRTGLG,PARM.LKED=(MAP,ØVLY,LIST)
//LKED.SYSIN DD UNIT=2400,VØL=SER=ELEFIN,DSN=DECK,
// DISP=ØLD,LABEL=3
//GØ.FT09FØØ1 DD UNIT=2311,DSN=&UNØ,SPACE=(3624,(155,10)),
// DCB=BUFNØ=1
//GØ.FT10FØØ1 DD UNIT=2311,DSN=&DØS,SPACE=(3624,(155,10)),
// DCB=BUFNØ=1
//GØ.FT11FØØ1 DD UNIT=2311,DSN=&TRE,SPACE=(264,(31,10)),
// DCB=BUFNØ=1
//GØ.FT12FØØ1 DD UNIT=2311,DSN=&CUA,SPACE=(264,(31,10)),
// DCB=BUFNØ=1
//GØ.FT13FØØ1 DD UNIT=2311,DSN=&CIN,SPACE=(44,(300,10))
//GØ.FT14FØØ1 DD UNIT=2311,DSN=&SEI,SPACE=(52,(200,10))
//GØ.FT15FØØ1 DD UNIT=2311,DSN=&SIE,SPACE=(48,(100,10))
//GØ.FT16FØØ1 DD UNIT=2311,DSN=&OCH,SPACE=(16,(100,10))
//GØ.FT06FØØ1 DD SYSOUT=A,DCB=(RECFM=UA,BLKSIZE=133)
//GØ.FT05FØØ1 DD *
```

DATOS DEL O DE LOS PROBLEMAS

```
/*
//
```

6.- Referencias.

1.- Sarrazin, Mauricio, "A higher Order Rectangular Finite Element and its Application to the Analysis of Shear Walls", M. of Sc. Thesis, Massachusetts Institute of Technology,1968.

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

EN

INGENIERIA CIVIL

Curso de Extensión: 3 al 7 de Diciembre, 1973

Sección Estructuras

Departamento de Obras Civiles

Universidad de Chile

Tomás Guendelman
Mauricio Katanella
Rodolfo Saragoni
Mauricio Sarrazin
Patricia Vivero

Manual M4.- ICES-STRUDL II: Segunda Parte

Programador: Instituto Tecnológico de Massachusetts

P R O L O G O

La presente publicación es sólo una complementación del manual

ICES STRUDL II

El Lenguaje para Diseño Estructural

Manual Simplificado de Uso

por

Mauricio Sarrazin A.
Rafael Burmester G.

Depto. de Obras Civiles, U. de Chile., 1971

Se amplía aquí el análisis estático de reticulados, agregando a las estructuras formadas por barras uniaxiales, el análisis de estructuras contínuas mediante elementos finitos. Esto permite modelar, en forma más realista, casos en que el uso de elementos uniaxiales es insuficiente, abriendo enormemente las posibilidades de análisis del programa STRUDL.

La parte de elementos finitos de STRUDL II está también incorporada a la versión de dicho programa implementada en el computador IBM-360/40 del Centro de Computación de la Universidad de Chile. Debido a la capacidad limitada de este computador, no todas las posibilidades del programa, que se especifican en el presente manual, funcionan en forma óptima. Este resulta muy ineficiente para problemas de tamaño grande, por la necesidad de contínuo traspaso de información de memoria activa a secundaria y vice-versa.

Para la elaboración del presente manual se usó principalmente la siguiente publicación:

ICES STRUDL II, The Structural Design Language, Engineering User's Manual, Vol. 2: Additional Design and Analysis Facilities, M.I.T., 1969.

I N T R O D U C C I O N

Entre las potencialidades del sistema de computación ICES STRUDL II, se cuenta el análisis de estructuras continuas mediante el método de elementos finitos. Este procedimiento aproximado de análisis ha tenido un gran desarrollo durante la última década, debido principalmente a la generalización del empleo de los computadores digitales y a lo apropiado del método para adaptarse a programas de uso general, totalmente análogos a los que se recurre para solucionar reticulados formados por barras. Basta para esto con generalizar el concepto de "barra" al de "elemento", y agregar nuevos puntos de contacto entre ellos (puntos nodales). Una vez definido el tipo de elemento a usar y determinada su matriz de rigidez, las fuerzas consistentes (o fuerzas de empotramiento perfecto) y las relaciones entre desplazamientos nodales y tensiones, el procedimiento a seguir en un análisis de rigidez es exactamente igual en ambos casos.

En ICES STRUDL II se ha incluído 12 tipos de elementos finitos, que permiten resolver problemas tales como tensiones o deformaciones planas, flexión y extensión de placas, cáscaras rebajadas y problemas tridimensionales. Muchas de las subrutinas que se usan en problemas con elementos finitos son las mismas que aquellas para reticulados de barras. En consecuencia, la mayoría de las instrucciones usadas en STRUDL II para éstos son aplicables también a aquéllos. Se revisarán aquí sólo las instrucciones adicionales que es necesario introducir y se desarrollarán algunos ejemplos de aplicación.

El formato de entrada de datos es libre, al igual que en el caso reticulados de barras. La notación a usar en la descripción de las instrucciones es idéntica a la que se define en la página 4 de la primera parte del manual.

Tarjetas de Control. Las tarjetas de control son idénticas a las que aparecen en la página 5 de la primera parte del manual, con la única diferencia que hay que agregar antes de la tarjeta

```
// EXEC STRUDL, la siguiente

// DD DSNAME = ICES.STRUDL2.ELEFIN,DISP=OLD,UNIT=2311
```

El Módulo ELEFIN en STRUDL-II.

El módulo del sistema STRUDL II que contiene los programas de elementos finitos, ha sido denominado ELEFIN en el sistema implementado en el computador IBM 360/40 de la Universidad de Chile. En este módulo se han puesto los programas especiales para extender el análisis de reticulados formados por barras uniaxiales a problemas continuos usando el método de elementos finitos. El sistema tiene implementados elementos para problemas de tensiones o deformaciones planas, de placas, de cáscaras rebajadas y tridimensionales. Además es posible combinar elementos de distinto tipo entre sí y con miembros uniaxiales.

Se ha implementado, en STRUDL II, varios tipos de elementos finitos, los cuales se detallarán a continuación. Un elemento queda caracterizado por su forma geométrica, el número y el tipo de incógnitas asociadas a los puntos nodales y la formulación usada para determinar sus propiedades de rigidez o flexibilidad. En general, pueden haber varios tipos de elementos diferentes que correspondan todos al mismo tipo de problemas. La selección entre los tipos de elementos disponibles, para usar en un análisis dado, depende de la geometría del problema, el comportamiento físico esperado y el grado de precisión deseado.

Los tipos de elementos finitos disponibles en STRUDL II y sus características principales se encuentran en la figura 1. Los cinco primeros son para problemas de tensiones o deformaciones planas. Una descripción detallada de cada uno de dichos elementos se encuentra a continuación:

NOMBRE DEL ELEMENTO	FORMA	NUMERO DE PUNTOS NODALES	GRADOS DE LIBERTAD POR NUDO	TIPO DE PROBLEMA
PSR		4	u_1, u_2	Tensiones planas. Deformaciones planas.
CSTL		3	u_1, u_2	"
CSTG		3	u_1, u_2	"
LST		6	u_1, u_2	"
PSROT		4	u_1, u_2, u_6	"
CPT		3	u_3, u_4, u_5	Flexión de placas.
BPR		4	u_3, u_4, u_5	"
BPP		4	u_3, u_4, u_5	"
SSCR		4	u_1, u_2, u_3, u_4, u_5	Cáscaras rebajadas
SSCT		3	u_1, u_2, u_3, u_4, u_5	"
SBCT		3	u_1, u_2, u_3, u_4, u_5	Extensión y flexión de cáscaras
TETRA 4		4	u_1, u_2, u_3	Tridimensional

Figura 1.- Tipos de Elementos finitos en STRUDL II.

Descripción de los elementos.

1.- Elemento 'PSR' (Ref. 4) (Plane Strain Rectangular)

Tipo de problema: deformaciones y tensiones planas.

Incógnitas nodales: u_1, u_2(*)

Características fundamentales: elemento rectangular con puntos nodales en los cuatro vértices (ver figura 2).

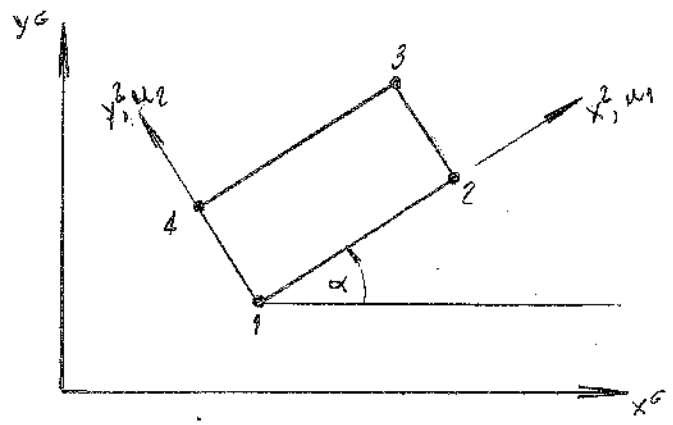


Figura 2

La matriz de rigidez del elemento se obtiene mediante una expansión de los desplazamientos en función de 8 parámetros indeterminados.

$$u_1 = a_1 + a_2 x^L + a_3 y^L + a_4 x^L y^L$$

$$u_2 = a_5 + a_6 x^L + a_7 y^L + a_8 x^L y^L$$

(*) Se usará la siguiente notación para los grados de libertad:

u_1, u_2, u_3 = desplazamientos en las direcciones de los ejes x, y, z respectivamente.

u_4, u_5, u_6 = rotaciones en torno a los ejes x, y, z respectivamente.

Material: isotrópico solamente. Las constantes elásticas básicas son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

Cargas: deben darse en los nudos.

Resultados: deformaciones y tensiones, deformaciones y tensiones principales, calculadas en el baricentro del elemento y con respecto a los ejes globales.

2.- Elemento 'CSTL' (Ref. 3 y 4) (Constant Strain Triangular Local).

Tipo de problema: tensiones y deformaciones planas.

Incógnitas nodales: u_1, u_2

Características básicas: el elemento 'CSTL' es triangular con puntos nodales en sus tres vértices. La figura 3 indica sus características geométricas:

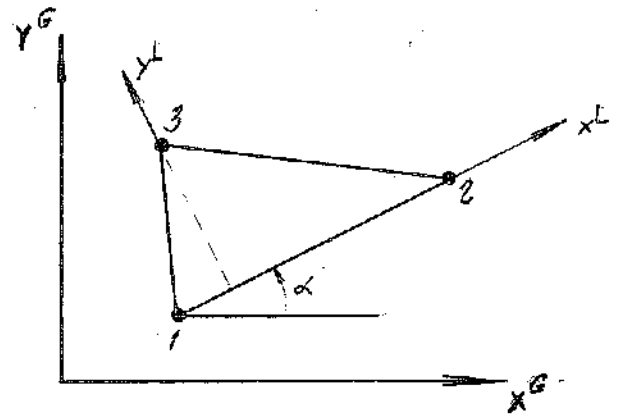


Figura 3

Se usan las siguientes expansiones para los desplazamientos:

$$u_1 = a_1 + a_2 X^L + a_3 Y^L$$

$$u_2 = a_4 + a_5 X^L + a_6 Y^L$$

La matriz de rigidez del elemento se calcula con respecto al sistema local de referencia y en seguida se rota al sistema global.

Material: isotrópico solamente. Las constantes elásticas básicas son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson.

Cargas: sólo en los nudos.

Resultados: deformaciones y tensiones, deformaciones y tensiones principales; con respecto al sistema global de referencia.

3.- Elemento 'CSTG' (Ref. 4) (Constant Strain Triangular Global).

Este tipo de elemento es casi idéntico al 'CSTL'. Sus únicas diferencias son:

a) la matriz de rigidez se calcula directamente en coordenadas globales, lo que lo hace más eficiente, y

b) se puede usar para material anisotrópico. Si este es el caso, debe entregarse la matriz constitutiva D completa, en coordenadas globales.

4.- Elemento 'LST' (Ref. 5) (Lineal Strain Triangular)

Tipo de problema: tensiones y deformaciones planas.

Incógnitas nodales: u_1, u_2

Características básicas: elemento triangular con 6 puntos nodales: los vértices y los puntos medios de los lados. La figura 4 muestra las características geométricas.

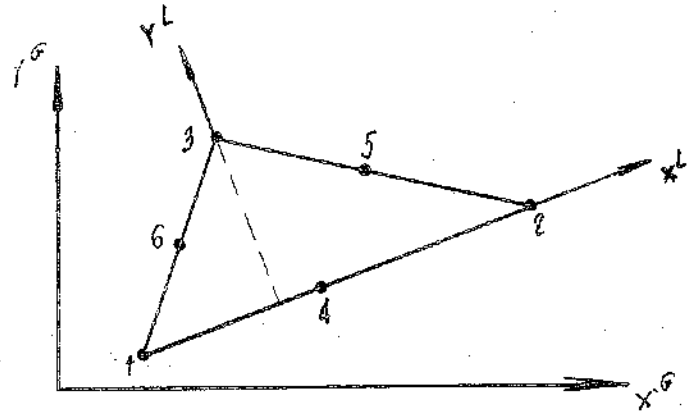


Figura 4

Los desplazamientos se representan mediante polinomios de interpolación usando coordenadas triangulares. El campo de desplazamientos en el elemento es cuadrático. La variación de los desplazamientos a lo largo de los lados también es cuadrática. La matriz de rigidez se calcula con respecto al sistema global de referencia.

Material: igual que para el elemento 'CSTG'.

Cargas: sólo en los nudos.

Resultados: deformaciones y tensiones, deformaciones y tensiones principales, en los tres vértices y con respecto al sistema global de referencia.

5.- Elemento 'CPT' (Ref. 6) (Cubic Plate Triangular).

Tipo de problema: flexión de placas planas.

Incógnitas nodales: u_3, u_4, u_5

Características: elemento triangular con puntos nodales en sus tres vértices. Sus características geométricas son idénticas al elemento 'CSTL'.

Se usa una expansión cúbica para u_3. Las expansiones para u_4 y u_5 se obtienen mediante diferenciación de u_3. La matriz de rigidez del elemento se calcula primero con respecto al sistema local de referencia y luego se rota al sistema global.

Material: igual que para el elemento 'CSTG'.

Cargas: pueden ser concentradas en los nudos o uniformemente distribuídas en el elemento en la dirección perpendicular a su plano, tanto en el sistema de referencia global como en el local.

Resultados: momentos por unidad de longitud en los tres puntos nodales, con respecto al sistema global de referencia.

6.- Elemento 'BPR' (Ref. 4) (Bending Plate Rectangular).

Tipo de problema: flexión de placas planas.

Incógnitas nodales: u_3, u_4, u_5

Características: elemento rectangular con puntos nodales en los cuatro vértices. Sus características geométricas son las mismas que las del elemento 'PSR'.

Se usa la siguiente expansión para u_3:

$$u_3 = a_1 + a_2 x^L + a_3 y^L + a_4 x^L y^L + a_5 (x^L)^2 + a_6 (y^L)^2 + a_7 (x^L)^3 + a_8 (y^L)^3 + a_9 (x^L)^2 y^L + a_{10} (y^L)^2 x^L + a_{11} (x^L)^3 y^L + a_{12} x^L (y^L)^3$$

Las expansiones para u_4 y u_5 se encuentran mediante diferenciación. La matriz de rigidez del elemento se obtiene primero con respecto al sistema local de referencia y luego se rota al sistema global.

Material: igual que para el elemento 'CSTG'.

Cargas: en los nudos o uniformemente distribuida en el elemento, en dirección normal a su plano, en coordenadas locales o globales.

Resultados: momentos por unidad de longitud en los puntos nodales, con respecto al sistema global de referencia.

7.- Elemento 'BPP' (Ref. 3) (Bending Plate Parallelogram.

Tipo de problema: flexión de placas planas.

Incógnitas nodales: u_3, u_4, u_5

Características: elemento en forma de paralelógramo con cuatro puntos nodales en sus vértices. Sus características geométricas se encuentra en la figura 5.

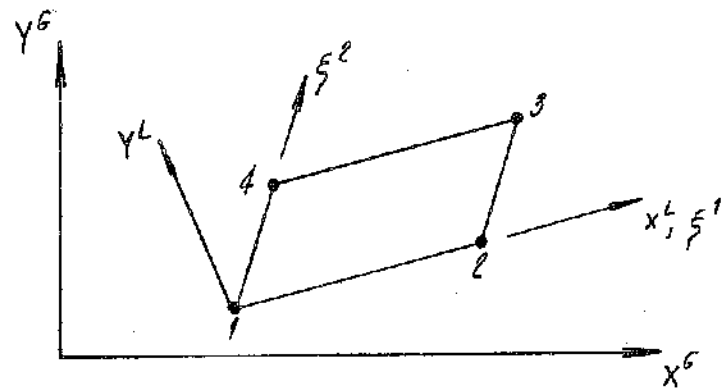


Figura 5

La matriz de rigidez del elemento se calcula en base a un desarrollo de los desplazamientos similar al usado en el elemento 'BPR'. Sin embargo este desarrollo está en función de las coordenadas oblicuas (ξ^1, ξ^2).

Material: igual al elemento 'CSTG'

Cargas: igual al elemento 'BPR'

Resultados: igual al elemento 'BPR'

8.- Elemento 'SSCR' (Ref. 7) (Shallow Shell Curved Rectangular)

Tipo de problema: flexión y extensión de placas planas y cáscaras rebajadas.

Incógnitas nodales: u_1, u_2, u_3, u_4, u_5

Características fundamentales: elemento rectangular con 4 puntos nodales en sus vértices. Sus características geométricas son iguales a las del elemento 'PSR'. La matriz de

rigidez del elemento se forma en base a desarrollos para u_1, u_2 y u_3. Para u_1 y u_2 se usa el mismo desarrollo que para los desplazamientos en el elemento 'PSR'. Para u_3 se usa el mismo desarrollo que para el elemento 'BPR'. La matriz de rigidez del elemento se calcula primero con respecto a un sistema local de coordenadas y luego se rota al sistema global.

El 'SSCR' es un elemento que toma en cuenta el efecto de curvatura. Las características de curvatura se pueden especificar dando la ecuación de la superficie correspondiente al elemento, o bien dando en forma explícita los valores de las curvaturas en el baricentro. Para el caso de problemas planos, debe omitirse la especificación de las curvaturas.

Material: sólo material isotrópico, especificado mediante el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

Cargas: sólo fuerzas en los nudos.

Resultados: resultantes de tensiones y momentos por unidad de longitud en el baricentro, con respecto al sistema global de referencia. Ver referencia 7 para la convención de signos.

9.- Elemento 'SSCT' (Ref. 8) (Shallow Shell Curved Triangular)

Tipo de problema: cáscaras rebajadas.

Incógnitas nodales: u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

Características fundamentales: elemento triangular con puntos nodales en sus vértices. Sus características geométricas son las mismas que las del elemento 'CSTL'. La matriz de rigidez del elemento se obtiene mediante un desarrollo polinómico de u_1, u_2 y u_3. Los desarrollos para u_1 y u_2 son los mismos que aquéllos para el elemento 'CSTL'. El desarrollo para u_3 es el mismo que el del elemento 'CPT'. La matriz de rigidez del elemento se calcula primero con respecto al sistema local de coordenadas y luego se rota al sistema global.

El resto de la descripción del elemento 'SSCT' es idéntica a la del elemento 'SSCR'. Para la convención de signos, véase la referencia 8.

10.- Elemento 'SBCT' (Ref. 8) (Shell Bending Curved Triangular).

Tipo de problema: extensión y flexión de placas planas. Análisis lineal estático y dinámico y geométricamente no lineal.

Incógnitas nodales: u_1, u_2, u_3, u_4, u_5

Características fundamentales: igual al 'SSCT' pero para elementos planos.

11.- Elemento 'TETRA 4' (Ref 4).

Tipo de problema: análisis tridimensional de tensiones.

Incógnitas nodales: u_1, u_2, u_3

Características fundamentales: elemento tetraedral con puntos nodales en los vértices. La matriz de rigidez del elemento se obtiene considerando un campo de deformaciones unitarias constantes dentro del elemento. En consecuencia, los desplazamientos son funciones lineales de las coordenadas.

La matriz de rigidez se obtiene directamente con respecto al sistema global de coordenadas. Los puntos nodales pueden enumerarse en cualquier forma.

Material: isotrópico.

Cargas: sólo en los puntos nodales.

12.- Elemento 'PSROT' (Ref. 9) (Plane Strain ROTation)

Tipo de problema: tensiones y deformaciones planas.

Incógnitas nodales: u_1, u_2, u_3

Características fundamentales: este elemento es similar al 'PSR', con la única diferencia de que se incluyen términos en la diagonal de la matriz de rigidez, correspondientes a la rigidez rotacional en el plano del elemento. En esta forma se le puede combinar con marcos planos.

Material: isotrópico.

Cargas: sólo en los nudos.

Resultados: deformaciones y tensiones, deformaciones principales y tensiones principales, en el baricentro del elemento.

Combinación de miembros uniaxiales y elementos finitos.

Como ya se ha señalado, STRUDL II permite combinar en un mismo problema varios tipos de elementos diferentes, o elementos con miembros uniaxiales, siempre que éstos tengan el mismo número y tipos de grados de libertad por nudo. Esto permite acercarse más a la realidad física del problema a estudiar. Así por ejemplo, al analizar una cáscara con viga de borde, se podrán usar elementos finitos para la cáscara e interconectarlos con miembros uniaxiales que estén representando la viga de borde. Habrá que tener cuidado, eso sí, que los elementos que se combinen sean consistentes, vale decir, exista compatibilidad de desplazamientos en los bordes. Los elementos 'CSTL' no son compatibles, por ejemplo, con los 'LST'.

La tabla de la figura 6 muestra los distintos tipos de miembros y elementos y su compatibilidad. Los espacios achurados indican que ambos elementos o miembros pueden presentarse combinados en un mismo problema.

En esta figura se ha usado la siguiente notación para denominar los distintos tipos de miembros:

PTM = reticulado plano	(Plane Truss Member)
PFM = marco plano	(Plane Frame Member)
PGM = emparrilado plano	(Plane Grid Member)
STM = reticulado espacial	(Space Truss Member)
SFM = marco espacial	(Space Frame Member)

Para combinar miembros y elementos finitos, debe definirse el tipo de problema cada vez que se entregue la información correspondiente.

Ej.:

```
TYPE PLANE FRAME
MEMBER INCIDENCES
1 1 2
-----------------
TYPE PLANE STRESS
ELEMENT INCIDENCES
10 10 11 12 13
```

ELEMENT	PTM	PFM	PGM	STM	SFM	CSTL	CSTG	PSR	LST	PSROT	CPT	BPR	BPP	SSCR	SSCT	SBCT	TETRA 4
PTM	▨					▨	▨	▨									
PFM		▨								▨							
PGM			▨								▨	▨	▨				
STM				▨													▨
SFM					▨												
CSTL	▨					▨	▨	▨									
CSTG	▨					▨	▨	▨									
PSR	▨					▨	▨	▨									
LST									▨								
PSLROT		▨								▨							
CPT			▨								▨	▨	▨				
BPR			▨								▨	▨	▨				
BPP			▨								▨	▨	▨				
SSCR														▨	▨		
SSCT														▨	▨		
SBCT																▨	
TETRA 4				▨													▨

Figura 6. Combinaciones posibles de miembros uniaxiales y tipos de elementos.

Ampliación en STRUDL II: nuevas instrucciones para usar elementos finitos.

En referencia (1), página 6 las instrucciones para describir un problema en lenguaje STRUDL se clasificaron en 24 tipos diferentes. Para hacer posible el uso de elementos finitos, algunas de las instrucciones anteriores deben ser modificadas. Se hace necesario además agregar nuevas instrucciones que cumplan funciones específicas.

A continuación se describen las modificaciones introducidas en los tipos antes mencionados:

Grupo 3: Declaración del modo.

No sufre modificaciones en la forma, pero se agrega la posibilidad de borrar elementos, en la forma siguiente:

DELETIONS
ELEMENTS (lista)

Grupo 4: Descripción del tipo estructural.

Se agrega aquí la posibilidad de indicar tipos estructurales diferentes a aquéllos formados por barras uniaxiales. La lista completa de tipos estructurales es ahora la siguiente:

PLANE TRUSS
PLANE FRAME
PLANE GRID
PLANE STRESS
PLANE STRAIN
PLATE BENDING
PLATE
SHALLOW SHELL
SPACE TRUSS
SPACE FRAME
TRIDIMENSIONAL

La instrucción es:

TYPE seguido de uno de los tipos anteriores.

Grupo 10: Definición de la topología.

En el caso de elementos finitos, cada elemento se puede extender entre más de dos puntos nodales. Será necesario, por lo tanto, indicar todos los puntos nodales a que llegan los elementos. Esto se hace mediante la instrucción:

ELEMENT INCIDENCES que se agrega a la anterior:
MEMBER INCIDENCES

Su forma es la siguiente:

ELEMENT INCIDENCES

Luego, una tarjeta para cada elemento en la cual se pone primero el número o nombre del elemento y luego una lista con los números o nombres de los nudos que éste conecta, siempre en el sentido contrario a los punteros del reloj. En el caso de elementos triangulares, la lista de nudos debe ser tal que el lado comprendido entre el primer y segundo nudos sea el lado mayor del triángulo. Para otros tipos de elementos el primer nudo puede ser cualquiera.

El sistema local de referencia es ortogonal. El eje X está ubicado según la dirección del primer lado especificado en la instrucción: ELEMENT INCIDENCES. El eje Y está a 90° con respecto al eje X, según la dirección positiva definida por la numeración de los nudos (sentido contrario a los punteros del reloj).

Grupo 15: Propiedades de los miembros.

En el caso de barras uniaxiales, las propiedades de los miembros se especifican mediante la instrucción: MEMBER PROPERTIES. Cuando los miembros son elementos finitos se usará: ELEMENT PROPERTIES. El número de propiedades a especificar para cada elemento depende del tipo de problema a resolver. Así, para problemas de elasticidad plana con material isotrópico, basta con definir el tipo de elemento y su espesor. En el caso de cáscaras, deberá especificarse además las curvaturas. En el caso más general, podrá especificarse directamente la matriz de rigidez del elemento.

La forma de definir las propiedades de los elementos es la siguiente:

Un encabezamiento general

ELEMENT PROPERTIES

Luego, dependiendo del tipo de problema, se tendrá:

a) Problemas de elasticidad plana y flexión de placas.

(lista) TYPE ('nombre') THICKNESS (valor)
--- otras especificaciones ---

b) Problemas de cáscaras.

(lista) TYPE ('nombre') THICKNESS (valor) { SURFACE EQUATION ('nombre') ó bien CURVATURES K 1 (valor) K 2 (valor) K 12 (valor) (ver más adelante) }

--- otras especificaciones ---

c) Problemas tridimensionales.

(lista) TYPE 'TETRA4'
--- otras especificaciones ---

d) Material ortotrópico o anisotrópico en general.

En caso de material no isotrópico, debe entregarse la matriz que relaciona las tensiones con las deformaciones unitarias (relaciones constitutivas). Esta matriz puede especificarse tanto en coordenadas locales como globales. Ella no necesita ser de 6 x 6 elementos, sino que su orden debe corresponder al número de tensiones y deformaciones asociadas al tipo de elemento. Debe comprobarse primero, en la descripción de los tipos de elementos - que está más atrás - si aquél que está siendo considerado admite o no esta forma de especificación, ya que no en todos es posible. Además, existe la restricción de que los componentes de esta matriz deben darse siempre en pulgadas y libras.

La forma de la instrucción, después del encabezamiento general, es la siguiente:

(lista) (otras especificaciones) RIGIDITY MATRIX { LOCAL ó GLOBAL } NC (número de columnas)

```
ROW 1 (valor 11) (valor 12) --- (valor 1n)
ROW 2 (valor 21) (valor 22) --- (valor 2n)
-----------------------------------------
ROW n (valor n1) (valor n2) --- (valor nn)
```

e) Especificación de la matriz de rigidez en general.

Esta forma de entregar las propiedades es conveniente cuando se quiere probar un nuevo tipo de elemento. El número de nudos y grados de libertad por nudo es variable de un tipo de elemento a otro. Como STRUDL usa submatrices cuyo orden es igual al número de grados de libertad por nudo, es necesario entregar la matriz de rigidez en su forma particionada. Si el elemento tiene n nudos, la forma de esta matriz será:

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} \left[K_{11}\right] & \left[K_{12}\right] & --- & \left[K_{1n}\right] \\ \left[K_{21}\right] & \left[K_{22}\right] & --- & \left[K_{2n}\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left[K_{n1}\right] & \left[K_{n2}\right] & --- & \left[K_{nn}\right] \end{bmatrix}$$

donde cada submatriz $\left[K_{ij}\right]$ corresponde a los nudos i y j en la matriz completa. La matriz de rigidez se puede especificar tanto en coordenadas globales como locales. Como es simétrica, sólo es necesario entregar las submatrices que están en o bajo la diagonal. Las submatrices nulas se pueden omitir. Si una matriz es diagonal, basta especificar los elementos de su diagonal principal, precedidos por la palabra DIAGONAL.

La forma de la instrucción es la siguiente:

(lista) TYPE ('nombre') STIFFNESS MATRIX { GLOBAL ó LOCAL } NODES (número) NDF (número)

donde NDF significa número de grados de libertad por nudo (Number of Degrees of Freedom).

Luego, para cada submatriz $\left[K_{ij}\right]$ se pone:

SUBMATRIX (i) (j) v_{11} v_{12} --- v_{1n}

v_{21} v_{22} --- v_{2n}

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

v_{n1} v_{n2} --- v_{nn}

O, en caso que la submatriz se especifique en forma diagonal:

SUBMATRIX (i) (j) DIAGONAL v_{11}, v_{22}, --- v_{nn}

Ejemplo de uso de esta opción:

```
ELEMENT PROPERTIES
1 TO 20 TYPE 'NUEVO' STIFFNESS MATRIX NODES 2 NDF 2
SUBMATRIX 1 1 DIAGONAL 105.1 220.5
SUBMATRIX 2 2 DIAGONAL  81.7  93.3
SUBMATRIX 2 1 14.3 27.5
              44.1 37.8
```

Para el caso de cáscaras se deben especificar las curvaturas del elemento, como se vió anteriormente. Esto se puede hacer de dos maneras; una es especificar directamente las curvaturas dando los valores de K1, K2 y K12 en el centro del elemento. Otra forma es especificar la ecuación de una superficie que contenga el elemento. En este último caso las curvaturas se pueden obtener directamente de la ecuación de la superficie.

Si se quiere optar por la segunda forma, se pueden usar tantas ecuaciones como sea necesario, asignándole un nombre a cada una y definiéndolas previamente. Para este fin se usa la siguiente instrucción:

SURFACE EQUATIONS
('nombre 1') C(v_1) Y(v_2) X(v_3) XY(v_4) YZ(v_5)

X2(v_6) XY2(v_7) YX2(v_8) Y3(v_9) X3(v_{10})

X2Y2(v_{11}) XY3(v_{12}) YX3(v_{13}) Y4(v_{14})

X4(v_{15})

('nombre 2') ----------

etc.

La ecuación definida bajo el nombre 'nombre 1' es:

$$z = v1 + v2y + v3x + v4xy + v5y^2 + v6x^2 + v7xy^2 + v8yx^2 + v9y^3 + v10x^3 + v11x^2y^2 + v12xy^3 + v13yx^3 + v14y^4 + v15x^4$$

Si alguno de los coeficientes de la ecuación es nulo, no es necesario especificarlo. El orden en que se pongan los coeficientes puede ser arbitrario.

Ejemplo: un paraboloide hiperbólico de ecuación $z = 5.\ xy$ se especificaría como

```
SURFACE EQUATIONS
'HIPER' XY 5.
```

Grupo 17: Condiciones de carga.

a) Cargas en los elementos. Para las cargas especificadas en los nudos, no hay diferencia con respecto a los reticulados de barras. Si las cargas están distribuidas dentro de los elementos, se puede usar la siguiente instrucción:

ELEMENTS LOADS

(lista) { SURFACE FORCES / BODY FORCES } { LOCAL / GLOBAL / PROYECTED } (especificaciones de cargas)

(lista) ----------

etc.

Las especificaciones de cargas son diferentes para el caso de cargas de superficie que para fuerzas de volumen. En el primer caso se pone:

PX(v1) PY(v2) PZ(v3) MX(v4) MY(v5) MZ(v6)

En cambio si las fuerzas son de volumen se pone

BX(v1) BY(v2) BZ(v3).

Para fuerzas de superficie PX, PY, PZ son las fuerzas y MX, MY, MZ los momentos por unidad de superficie en las direcciones de los ejes X, Y, Z respectivamente, los cuales pueden ser globales o locales. En el caso de usar la palabra PROJECTED, las fuerzas o momentos están dados por unidad de superficie proyectada.

b) Cargas por diferencias de temperatura. Así como en el caso de barras existía la instrucción MEMBER TEMPERATURE LOADS, para elementos finitos se tiene la instrucción:

ELEMENT TEMPERATURE LOADS

Y en seguida se especifica cada condición de temperatura de la siguiente manera:

$$\text{(lista de elementos)} \begin{Bmatrix} \text{AXIAL} \\ \\ \text{BENDING} \end{Bmatrix} \text{(valor)}$$

c) Deformaciones unitarias iniciales. Es posible definir deformaciones unitarias iniciales en los elementos. Para este fin se usa la instrucción.

ELEMENT INICIAL STRAINS

$$\text{(lista)} \begin{Bmatrix} \text{AXIAL X(valor) Y(valor) Z(valor)} \\ \\ \text{SHEAR XY(valor) XZ(valor) YZ(valor)} \end{Bmatrix}$$

Las definiciones de deformaciones unitarias en función de los desplazamientos u_1, u_2 y u_3 son:

$$e_x = \frac{\partial u_1}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$e_y = \frac{\partial u_2}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}$$

$$e_z = \frac{\partial u_3}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y}$$

Las deformaciones iniciales son usadas por el programa para calcular las tensiones en los elementos y las deformaciones totales. Sólo es necesario especificar aquellas deformaciones que correspondan al tipo de problema en estudio.

Grupo 23. Definición de la información de salida.

Los resultados se pueden hacer imprimir mediante la instrucción LIST. En el caso de elementos finitos, a las opciones que habían para estructura de barras, se agregan otras nuevas. La siguiente es una lista completa:

```
        *( FORCES                  )
         ( DISTORTIONS             )
         ( LOADS                   )   ( ALL                 )
         ( REACTIONS               )   ( MEMBERS (lista)     )
LIST     ( DISPLACEMENTS           )   ( JOINTS (lista)      )
         ( STRESSES                )   ( ELEMENTS (lista)    )
         ( PRINCIPAL STRESSES      )
         ( STRAINS                 )
         ( PRINCIPAL STRAINS       )
```

Ejemplo de Aplicación :

La Figura 7 muestra un muro de un estribo de puente carretero, solicitado por empuje de tierra. Dos de sus bordes se han supuesto empotrados al resto de la estructura, mientras los otros dos están libres. La malla de elementos empleada se puede apreciar en la Figura 8. En el proceso de análisis se ha concentrado la carga distribuída a los nudos considerando las áreas colaborantes. Los resultados para las secciones x=4 m. e y=4m, se han resumido en la Figura 9.

Los comandos STRUDL para este ejemplo se encuentran en las páginas 26 a 29.

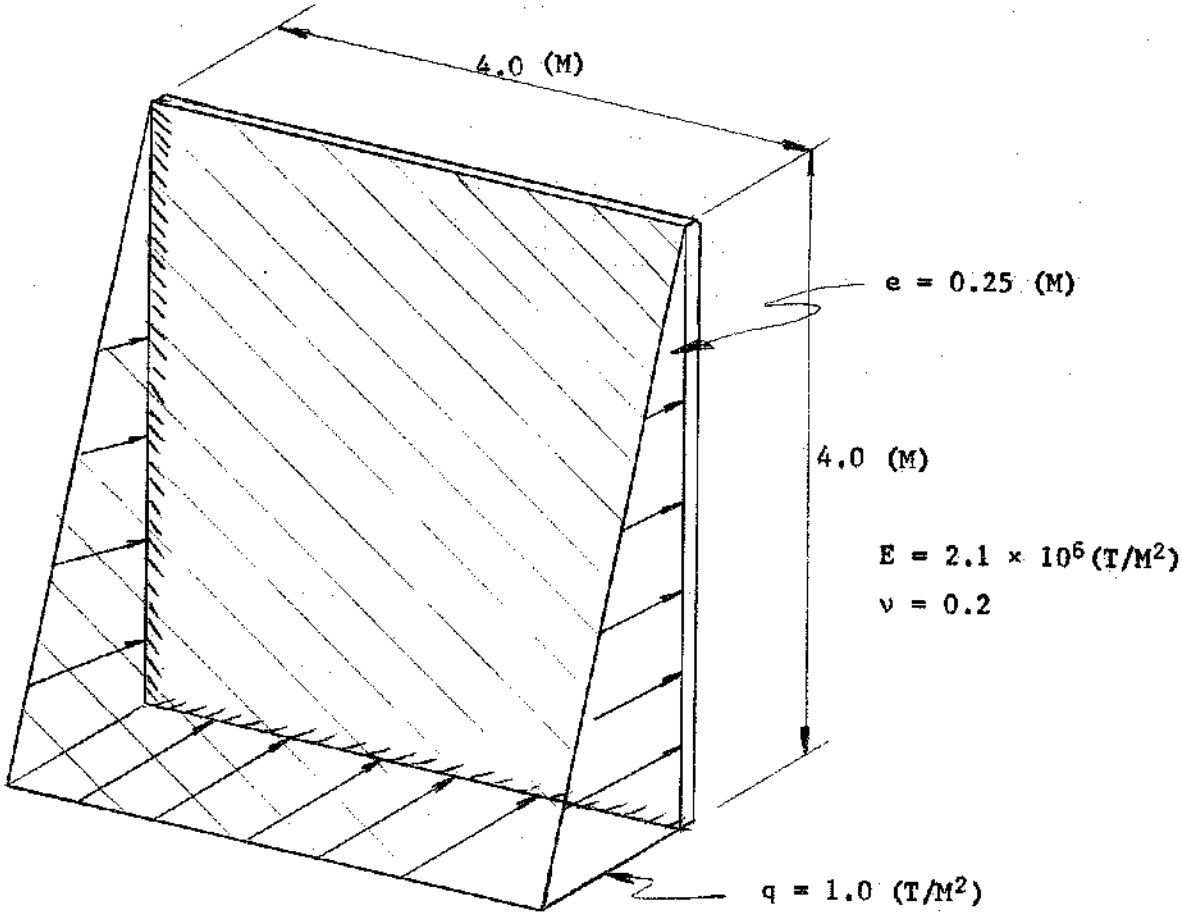


FIGURA 7.- MURO DE UN ESTRIBO DE PUENTE CARRETERO SOMETIDO A EMPUJE DE TIERRA.

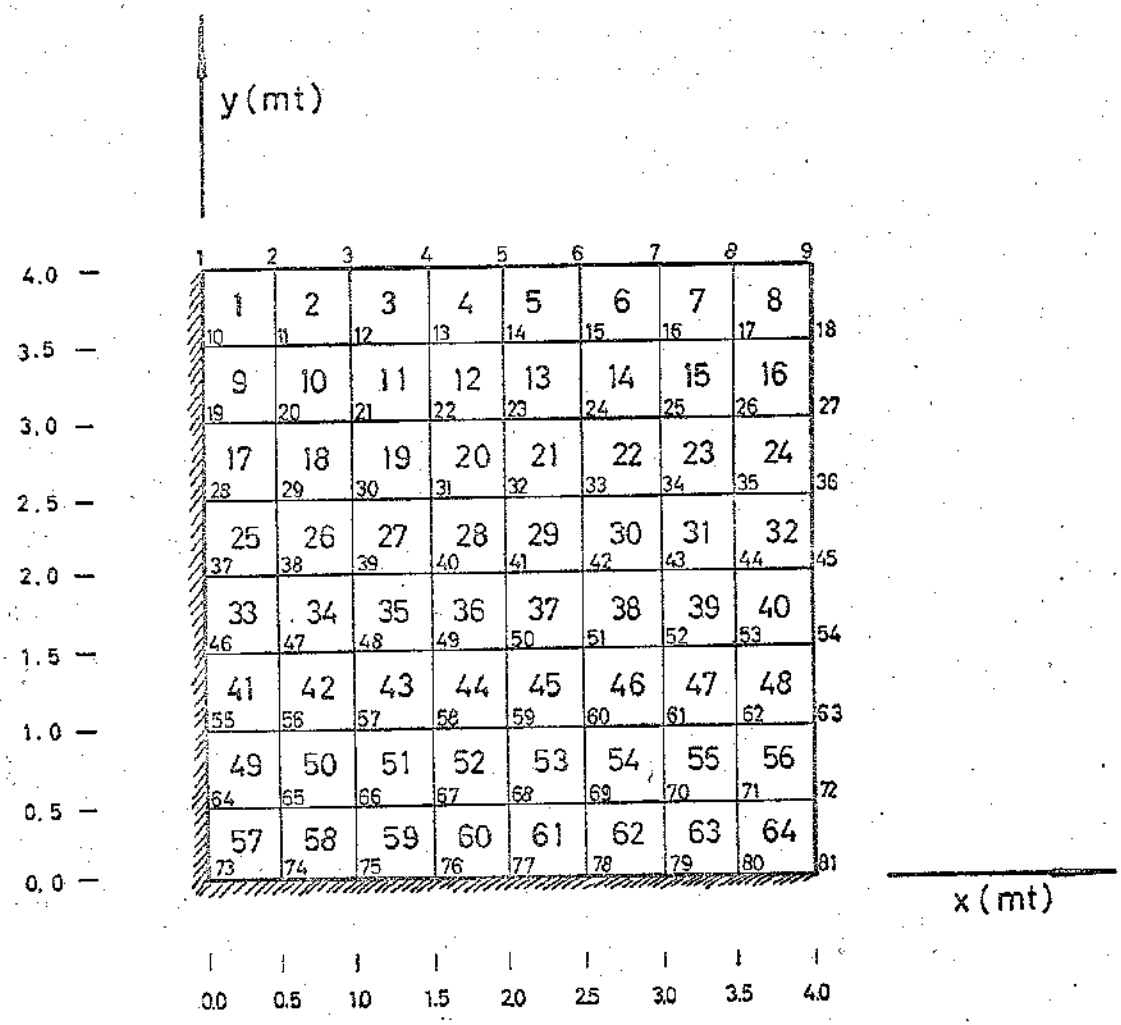
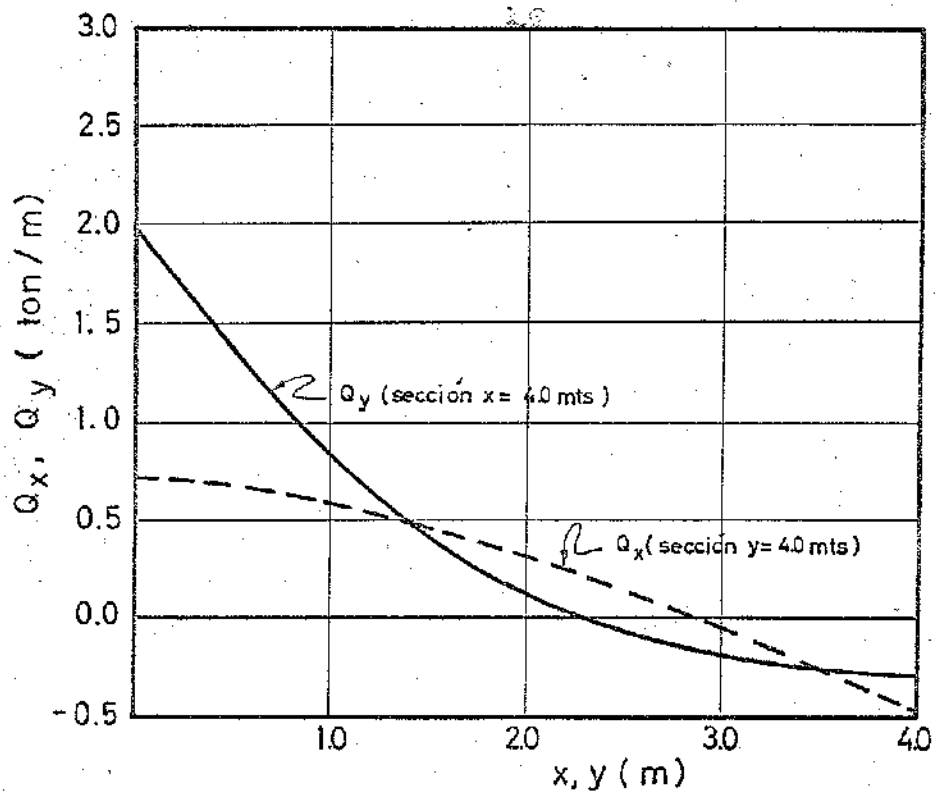


FIGURA 8 - MALLA DE ELEMENTOS FINITOS USADA EN EL EJEMPLO



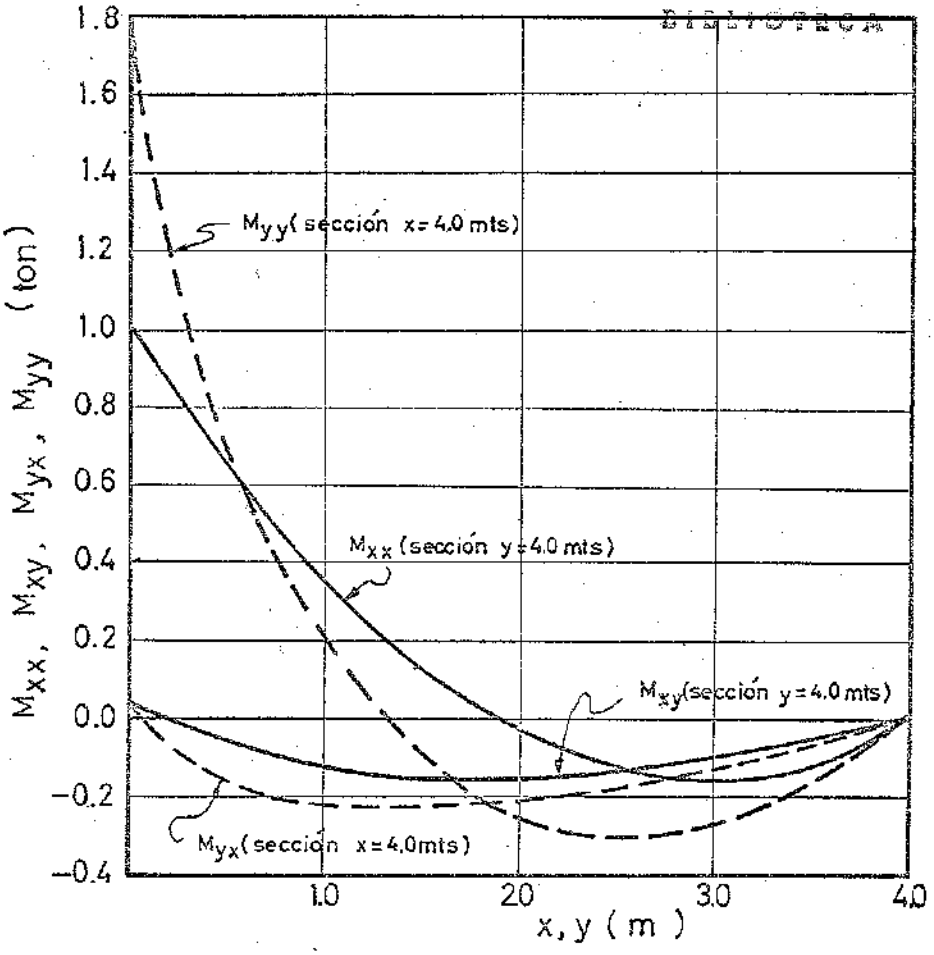


FIGURA 9.- ESFUERZOS INTERNOS EN LAS SECCIONES
x = 4 e y = 4

```
STRUDL 'PLATE' 'CASO 8*8*0.25  64 ELEMENTOS'
TYPE PLATE BENDING
JOINT COORDINATES
 1   0.0   4.0  S
 2   0.5   4.0
 3   1.0   4.0
 4   1.5   4.0
 5   2.0   4.0
 6   2.5   4.0
 7   3.0   4.0
 8   3.5   4.0
 9   4.0   4.0
 10  0.0   3.5  S
 11  0.5   3.5
 12  1.0   3.5
 13  1.5   3.5
 14  2.0   3.5
 15  2.5   2.5
 16  3.0   3.5
 17  3.5   3.5
 18  4.0   3.5
 19  0.0   3.0  S
 20  0.5   3.0
 21  1.0   3.0
 22  1.5   3.0
 23  2.0   3.0
 24  2.5   3.0
 25  3.0   3.0
 26  3.5   3.0
 27  4.0   3.0
 28  0.0   2.5  S
 29  0.5   2.5
 30  1.0   2.5
 31  1.5   2.5
 32  2.0   2.5
 33  2.5   2.5
 34  3.0   2.5
 35  3.5   2.5
 36  4.0   2.5
 37  0.0   2.0  S
 38  0.5   2.0
 39  1.0   2.0
 40  1.5   2.0
 41  2.0   2.0
 42  2.5   2.0
 43  3.0   2.0
 44  3.5   2.0
 45  4.0   2.0
 46  0.0   1.5  S
 47  0.5   1.5
 48  1.0   1.5
 49  1.5   1.5
 50  2.0   1.5
```

51	2.5	1.5	
52	3.0	1.5	
53	3.5	1.5	
54	4.0	1.5	
55	0.0	1.0	S
56	0.5	1.0	
57	1.0	1.0	
58	1.5	1.0	
59	2.0	1.0	
60	2.5	1.0	
61	3.0	1.0	
62	3.5	1.0	
63	4.0	1.0	
64	0.0	0.5	S
65	0.5	0.5	
66	1.0	0.5	
67	1.5	0.5	
68	2.0	0.5	
69	2.5	0.5	
70	3.0	0.5	
71	3.5	0.5	
72	4.0	0.5	
73	0.0	0.0	S
74	0.5	0.0	S
75	1.0	0.0	S
76	1.5	0.0	S
77	2.0	0.0	S
78	2.5	0.0	S
79	3.0	0.0	S
80	3.5	0.0	S
81	4.0	0.0	S

ELEMENT INCIDENCES

1	10	11	2	1
2	11	12	3	2
3	12	13	4	3
4	13	14	5	4
5	14	15	6	5
6	15	16	7	6
7	16	17	8	7
8	17	18	9	8
9	19	20	11	10
10	20	21	12	11
11	21	22	13	12
12	22	23	14	13
13	23	24	15	14
14	24	25	16	15
15	25	26	17	16
16	26	27	18	17
17	28	29	20	19
18	29	30	21	20
19	30	31	22	21
20	31	32	23	22

```
21      32 33 24 23
22      33 34 25 24
23      34 35 26 25
24      35 36 27 26
25      37 38 29 28
26      38 39 30 29
27      39 40 31 30
28      40 41 32 31
29      41 42 33 32
30      42 43 34 33
31      43 44 35 34
32      44 45 36 35
33      46 47 38 37
34      47 48 39 38
35      48 49 40 39
36      49 50 41 40
37      50 51 42 41
38      51 52 43 42
39      52 53 44 43
40      53 54 45 44
41      55 56 47 46
42      56 57 48 47
43      57 58 49 48
44      58 59 50 49
45      59 60 51 50
46      60 61 52 51
47      61 62 53 52
48      62 63 54 53
49      64 65 56 55
50      65 66 57 56
51      66 67 58 57
52      67 68 59 58
53      68 69 60 59
54      69 70 61 60
55      70 71 62 61
56      71 72 63 62
57      73 74 65 64
58      74 75 66 65
59      75 76 67 66
60      76 77 68 67
61      77 78 69 68
62      78 79 70 69
63      79 80 71 70
64      80 81 72 71
LOADING 1 'CARGA TRIANGULAR'
JOINT LOADS
1 9 FORCE Z -0.0026
2 3 4 5 6 7 8 FORCE Z -0.00521
10 18 FORCE Z -0.01562
11 12 13 14 15 16 17 FORCE Z -0.03124
19 27 FORCE Z -0.03124
```

```
20 21 22 23 24 25 26 FORCE Z -0.06248
28 36 FORCE Z -0.04685
29 30 31 32 33 34 35 FORCE Z -0.09371
37 45 FORCE Z -0.06248
38 39 40 41 42 43 44 FORCE Z -0.12496
46 54 FORCE Z -0.07809
47 48 49 50 51 52 53 FORCE Z -0.15618
55 63 FORCE Z -0.09371
56 57 58 59 60 61 62 FORCE Z -0.18742
64 72 FORCE Z -0.10933
65 66 67 68 69 70 71 FORCE Z -0.21865
73 81 FORCE Z -0.05987
74 75 76 77 78 79 80 FORCE Z -0.11974
 CONSTANTS
 E 300000. ALL
 POISSON 0.2 ALL
 ELEMENT 1 TO 64 PROPERTIES TYPE 'BPR' THICKNESS 0.25
 DUMP TIME
 LOADING LIST ALL
 STIFFNESS ANALYSIS
 LIST DISPLACEMENT REACTIONS STRESSES STRAIN ALL
 PRINT DATA
 FINISH
```